NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Paul APPELL,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.



1892

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. P. APPELL.

GÉOMÉTRIE.

Théorie des déblais et remblais (1) (¹). — J'ai entrepris l'étude du problème des déblais et remblais, proposé par Monge en 1781, pour répondre à la question posée par l'Académie, en 1884, comme sujet du prix Bordin. L'Académie a bien voulu accorder le prix à mon Mémoire. Pour exposer la question à résoudre et les résultats obtenus, je ne puis mieux faire que de reproduire les passages du Rapport de M. Darboux relatifs à mon travail :

« Dans la question proposée en 1884, comme sujet du prix Bordin » (Géométrie), l'Académie demandait aux concurrents, *soit l'étude générale du problème des déblais et des remblais, soit la solution dans un* » *cas simple choisi par l'auteur du Mémoire.*

(¹) Les chiffres entre parenthèses renvoient aux numéros de la Bibliographie placée à la fin de cette Notice.

» L'étude de ce beau problème remonte à Monge qui, dans un Mémoire » publié en 1781, où se trouvent développées d'une manière incidente la » théorie des lignes de courbure et les propriétés des systèmes de rayons » rectilignes, s'était posé la question générale suivante :

» *Deux volumes équivalents étant donnés, les décomposer en parcelles* » *infiniment petites et deux à deux équivalentes, se correspondant suivant* » *une loi telle que, si l'on multiplie le chemin parcouru par chaque par-* » *celle, transportée sur celle qui lui correspond, par le volume de cette* » *parcelle, la somme des produits ainsi obtenus soit un minimum.*

» Dans le cas où les volumes peuvent être assimilés à des aires planes » situées dans le même plan, Monge résout complètement le problème » en remarquant que les routes de transport, lorsqu'elles forment un » système continu, doivent détacher dans le déblai et dans le remblai des » aires égales. Dans le cas où les routes ne peuvent former un système con- » tinu, il présente quelques remarques, complétées depuis par Dupin dans » un Mémoire sur le même sujet, qui fait partie des *Applications d'Ana-* » *lyse, de Géométrie et de Mécanique*. Enfin Monge, abordant le cas le plus » difficile, celui où le déblai et le remblai sont des volumes, nécessairement » équivalents, fait connaître la proposition suivante, qui est la pierre angu- » laire de cette théorie :

» *Les routes de transport doivent servir chacune à une infinité de* » *parcelles, et elles sont nécessairement normales à une famille de sur-* » *faces parallèles.*

» Mais il faut avouer que les raisonnements par lesquels Monge est con- » duit à ce beau théorème n'entraînent, en aucune manière, l'adhésion; ce » point essentiel, malgré l'étude nouvelle qui en a été faite par Dupin, » attendait encore une démonstration solide et appelait de nouvelles re- » cherches.

» La Commission espérait donc rencontrer, dans quelques-uns des Mé- » moires soumis à son examen, la preuve complète et l'étude générale du » théorème de Monge; elle désirait aussi, sans trop oser l'espérer à cause de » la difficulté de la question, obtenir l'intégration complète, dans un cas » suffisamment étendu, de l'équation aux dérivées partielles du second » ordre, déjà formée par Monge, qui sert à déterminer la surface normale » à toutes les routes.

» Le Mémoire inscrit sous le n° 5 répond d'une manière complète aux

» espérances aussi bien qu'aux vœux de la Commission. C'est un travail de » haute valeur où sont employées, alternativement et avec le plus grand » succès, les ressources de la Géométrie et les méthodes de l'Analyse mo- » derne; il réalise un progrès considérable dans l'étude de la question mise » au concours. Au début de son Mémoire, l'auteur s'élève de la considéra- » tion d'un système de points isolés à celle des masses continues. Il énonce, » sous le nom de *principe de translation, principe de symétrie,* etc., un » certain nombre de propositions élégantes et simples, dont l'application » rendra certainement de grands services dans la pratique. Nous signale- » rons plus particulièrement deux propositions faisant connaître deux sys- » tèmes différents de routes, d'une définition très générale et réalisant, l'un » et l'autre, le *minimum absolu* du prix de transport (1).

» Dans la deuxième Partie de son travail, l'auteur du Mémoire n° 5, après » avoir démontré que les routes forment un système continu ou se décom- » posent en plusieurs systèmes continus, applique la méthode des variations » au problème de Monge, et il établit le théorème fondamental, sans même » supposer que la densité soit constante à l'intérieur du déblai ou du rem- » blai. Enfin il examine le cas où les routes se partagent en plusieurs sys- » tèmes continus et il indique les moyens de déterminer les surfaces sépa- » ratrices, c'est-à-dire les surfaces auxquelles viennent aboutir les routes » appartenant à deux systèmes différents et contigus.

» Dans le cas des aires planes, nous l'avons déjà rappelé, le problème de » Monge peut recevoir une solution complète où ne figurent que des qua- » dratures. On devait se demander si, dans l'espace, l'équation aux dé- » rivées partielles donnée par Monge n'est pas, elle aussi, intégrable dans » tous les cas et d'une manière générale. Les résultats obtenus par l'auteur » du Mémoire donnent une réponse complète à cette question difficile. » Dans le cas où, par exemple, les volumes se réduisent à des aires planes

---

(1) Je reproduis ici une de ces propositions : *Supposons que le déblai et le remblai soient décomposés en éléments de même masse et que l'on puisse associer ces éléments deux à deux de telle façon que tous les segments* R_iD_i, *allant d'un élément du remblai à l'élément correspondant du déblai et prolongés dans le sens* R_iD_i, *rencontrent une portion de surface convexe* S *du côté de la convexité et soient normaux à cette surface, alors le système des routes les plus avantageuses se compose précisément de ces segments* R_iD_i.

Il en est de même, évidemment, si ce sont les prolongements de tous les segments dans le sens opposé D_iR_i qui sont normaux à S du côté de la convexité. En supposant S réduit à un plan ou à un point, on obtient des cas particuliers intéressants.

» situées dans des plans parallèles, l'intégration de l'équation de Monge est
» ramenée à celle des surfaces minima si les aires ont même densité, et à
» celle des surfaces à courbure constante si les densités sont différentes.

» Ces exemples sont précieux, parce qu'ils prouvent que l'on doit re-
» noncer à intégrer dans tous les cas l'équation du second ordre de Monge;
» mais aussi parce qu'ils ont permis à l'auteur de signaler avec netteté les
» difficultés nouvelles et sérieuses que l'on rencontrera, même après avoir
» intégré cette équation.

» Ces difficultés sont de la nature de celles qui se présentent dans la
» théorie des surfaces minima. Si l'on considère toutes les surfaces formant
» une nappe continue passant par une courbe fermée, le calcul des varia-
» tions apprend que la surface d'aire minimum aura, en chaque point, ses
» rayons de courbure égaux et de signes contraires. L'équation aux dé-
» rivées partielles de cette surface une fois intégrée, la condition à laquelle
» elle est assujettie, de passer par la courbe, ne permet pas de déterminer
» complètement les deux fonctions arbitraires dont elle dépend. Il existe
» une infinité de surfaces minima contenant la courbe; mais ces surfaces ne
» satisfont pas toutes, on le sait, à la condition, supposée cependant par le
» calcul des variations, de former une nappe continue reliant les uns aux
» autres tous les points de la courbe. On ne peut déterminer les deux fonc-
» tions arbitraires qu'en employant des considérations tout à fait indépen-
» dantes de la méthode des variations, puisque la condition à laquelle il
» s'agit de satisfaire est supposée remplie au moment même où commence
» l'application de cette méthode. Le problème auquel on est ainsi conduit
» arrête aujourd'hui encore les efforts des géomètres et n'a pu être résolu
» que dans quelques cas particuliers.

» La solution du problème de Monge présente des difficultés analogues
» et peut-être plus grandes. Les fonctions arbitraires d'une variable, qui
» entrent dans les équations du système des routes, doivent être déter-
» minées par la condition que les routes forment un système continu, per-
» mettant de transporter dans l'ensemble du remblai la totalité des par-
» celles qui composent le déblai. La condition, évidente *a priori*, que les
» routes limites soient tangentes à la fois à la surface du déblai et à celle
» du remblai, ne fait connaître qu'une de ces deux fonctions et il n'existe,
» comme dans la théorie des surfaces minima, aucune règle fixe et précise
» conduisant à la solution complète de la question proposée. Des exemples
» bien choisis jettent beaucoup de lumière sur cette discussion délicate.

» Les indieations rapides qui préeèdent suffiront à montrer toute l'im-
» portanee des résultats obtenus par l'auteur du Mémoire n° 5. . . . . .

. . . .

. . . .

» La Commission [1] propose de partager le prix Bordin entre les Mé-
» moires n° 5 et n° 1, en attribuant *deux mille franes* à l'auteur du Mé-
» moire n° 5, *mille franes* à l'auteur du Mémoire n° 1, et d'aeeorder en
» outre une mention honorable à l'auteur du Mémoire n° 2.

» Elle émet le vœu que les deux premiers Mémoires soient publiés, au
» moins par extrait, dans les Reeueils de l'Aeadémie. »

« Les eonelusions de ee Rapport sont adoptées.

» L'auteur du Mémoire inserit sous le n° 5 est M. P. Appell.

» L'auteur du Mémoire inserit sous le n° 1 est M. Otto Ohnesorge.

» Conformément au désir exprimé par l'auteur, il a été proeédé à l'ouverture du pli eaeheté qui aeeompagne le Mémoire inserit sous le n° 2. M. le Président a proelamé le nom de M. A. de Saint-Germain. »

Parmi les questions que j'ai traitées à titre d'exemples dans le Mémoire sur lequel on vient de lire un rapport si favorable, se trouvent les suivantes qui me paraissent mériter quelque attention. En supposant que le déblai et le remblai sont des aires homogènes équivalentes situées dans deux plans reetangulaires, on trouve que les routes servant au transport sont normales à une surfaee satisfaisant à une équation aux dérivées partielles qui se transforme en elle-même par la transformation remarquable que M. Bonnet a indiquée à la page 486 du tome XLII des *Comptes rendus*. En supposant ensuite que le déblai et le remblai sont des aires homogènes équivalentes situées sur la surfaee d'une sphère, je démontre que les routes servant au transport sont normales à une surfaee possédant eette propriété que : *la projection du eentre de la sphère sur ehaque normale se trouve au milieu des deux eentres de eourbure prineipaux.* L'emploi du système de eoordonnées tangentielles dû à M. Bonnet me permet d'intégrer l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre définissant ees surfaees; je suis revenu depuis (78) sur l'étude de ees surfaees, en donnant sous une forme simple les expressions des eoordonnées d'un de leurs points

[1] Composée de MM. Hermite, Jordan, Bertrand, Bonnet; Darboux, rapporteur.

en fonction de deux paramètres et en indiquant les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques, dont les premières peuvent être intégrées dans une infinité de cas comprenant une infinité de surfaces algébriques. J'ai montré en outre que ces surfaces se rattachent d'une façon simple aux surfaces minima et aux surfaces étudiées par M. Bonnet (*Comptes rendus*, t. XLII, p. 486); on a par exemple la construction suivante : *Étant donnée une surface* S *de M. Bonnet, on mène en un point* M *de cette surface le plan tangent* P *et la normale* MN *jusqu'au plan* xOy : *le plan* Π *parallèle à* P *et situé à une distance de l'origine égale à la normale* MN *enveloppe une de nos surfaces.* Cette correspondance entre nos surfaces et celles de M. Bonnet montre que :

De tout système de routes servant à déblayer une aire plane homogène sur une aire équivalente située dans un plan parallèle, on peut déduire un système de routes servant à déblayer une aire sphérique homogène sur une aire équivalente située sur la même sphère.

Les routes servant au premier déblai seront normales à une surface de M. Bonnet, les routes servant au second déblai normales à une de nos surfaces. M. Goursat [1] a étudié depuis une classe étendue de surfaces comprenant les précédentes comme cas particulier.

Involutions d'ordre supérieur. — Les beaux travaux de Chasles, concernant les courbes et les surfaces du second ordre, sont basés en grande partie sur la notion d'involution et d'homographie entre deux éléments géométriques dépendant rationnellement d'un paramètre (points sur une droite, sur une conique, etc., droites passant par un point, tangentes à une conique, ...).

L'involution de Chasles est définie analytiquement par une relation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0,$$

entre les deux valeurs λ_1 et λ_2 du paramètre variable qui correspondent aux deux éléments géométriques considérés. Je me suis proposé d'étudier les propriétés des courbes unicursales, planes ou gauches, de degrés supérieurs, en prenant pour point de départ la notion d'involution d'ordre supérieur entre trois ou plusieurs éléments géométriques dépendant ration-

(1) *American Journal*, 1888.

nellement d'un paramètre (points sur une courbe unicursale, tangentes, plans osculateurs à une courbe unicursale, etc.). En premier lieu, (2) et (67), j'ai étudié le cas le plus simple, en prenant une involution du troisième ordre définie par une relation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0,$$

qui est l'extension naturelle de la relation de Chasles rappelée ci-dessus; de même que, dans l'involution de Chasles, il y a deux éléments doubles, il y a, dans l'involution du troisième ordre, trois éléments triples obtenus en supposant les valeurs de λ_1, λ_2, λ_3 égales entre elles. L'emploi de cette relation involutive permet de traiter, avec une grande facilité, la théorie des cubiques gauches, dont l'analogie avec les coniques se trouve ainsi mise en évidence à un nouveau point de vue. On a, par exemple, les théorèmes suivants : Une droite qui tourne autour d'un point fixe détermine sur une conique des groupes de deux points en involution; les points doubles sont les points de contact des tangentes issues du point. De même : Un plan qui tourne autour d'un point fixe détermine sur une cubique gauche des groupes de trois points en involution; les points triples sont les points de contact des plans osculateurs issus du point. Les réciproques sont vraies. Une propriété intéressante de l'involution du troisième ordre est que les éléments triples sont trois éléments homologues de l'involution : c'est de ce fait simple que résultent immédiatement plusieurs théorèmes importants dont le type est ce théorème bien connu : Les points d'inflexion d'une cubique plane unicursale sont en ligne droite. D'une façon générale, toutes les involutions d'ordre impair $(2n+1)$ possèdent la même propriété que l'involution du troisième ordre : les éléments $(2n+1)$-tuples forment un groupe d'éléments homologues; de là ce théorème général (94) :

Soit une courbe unicursale fixe et un faisceau de courbes algébriques tel qu'une des courbes du faisceau soit déterminée par $2n$ points et coupe la courbe unicursale en $2n+1$ points variables; il existe $2n+1$ courbes du faisceau, osculatrices à la proposée, et les $2n+1$ points d'osculation sont sur une courbe du faisceau.

Ce théorème s'étend à des courbes unicursales gauches, coupées par des faisceaux de surfaces algébriques.

Une notion qui ne se présente pas dans l'involution de Chasles et qui joue un rôle important dans les involutions d'ordre supérieur est celle des groupes d'*éléments singuliers*. Si l'involution est d'ordre n, il existe des

systèmes de valeurs de $(n-1)$ des éléments tels que le $n^{\text{ième}}$ est *indéterminé;* ces systèmes de valeurs forment les groupes d'éléments singuliers; ils sont définis par deux relations involutives simultanées. Par exemple, pour l'involution du troisième ordre, il existe deux éléments singuliers qui sont imaginaires, quand les trois éléments triples sont réels, et réels, quand deux des éléments triples sont imaginaires.

Après avoir appliqué l'involution du troisième ordre à l'étude des cubiques gauches, j'ai étudié les courbes gauches unicursales du quatrième ordre en prenant comme point de départ une relation involutive entre quatre éléments, relation qui me conduit à la classification et aux principales propriétés de ces courbes (3).

Ces méthodes peuvent être appliquées à l'étude de toutes les courbes unicursales ou, plus généralement, de tous les systèmes dont les éléments dépendent rationnellement d'un paramètre variable. Mais il est bien intéressant de remarquer que la relation involutive de Chasles, ainsi que les relations involutives d'ordre supérieur dont nous venons de parler, ne sont que des cas particuliers du célèbre théorème d'Abel, sur les intégrales algébriques, appliqué aux courbes unicursales. Les beaux résultats, que Clebsch a obtenus en appliquant le théorème d'Abel à l'étude de la Géométrie sur une courbe [1], se présentent donc à nous comme donnant la généralisation la plus naturelle et la plus profonde de l'idée élémentaire d'involution.

Homographie. — La notion d'homographie entre deux éléments (divisions homographiques, faisceaux homographiques), due à Chasles, peut être aussi étendue utilement à plusieurs éléments. C'est ce que j'ai montré, pour un cas particulier (relation homographique entre trois éléments, avec application aux surfaces du troisième ordre), dans une Communication faite à la Société philomathique en 1879.

Complexes. — On sait que Chasles a démontré l'identité des propriétés des pôles et plans polaires par rapport à une cubique gauche, avec les propriétés des plans et de leurs foyers dans le mouvement hélicoïdal d'un corps solide. J'ai donné (67), de cette importante proposition, une démonstration nouvelle fondée sur la considération de l'involution du troisième ordre. Si l'on se place dans les idées de Plücker, qui prend pour élément de l'espace la ligne droite au lieu du point ou du plan, on peut dire aussi que les tan-

---

[1] Voyez *Leçons de Géométrie*, publiées par Lindemann, traduites par Benoist, t. III.

gentes d'une cubique gauche font partie d'un complexe de droites du premier ordre. Il y avait alors deux problèmes à résoudre : 1° Une cubique gauche étant donnée, trouver les éléments du mouvement hélicoïdal ou du complexe correspondant; 2° Un complexe de droites du premier ordre étant donné, trouver les cubiques gauches dont les tangentes appartiennent au complexe. Je résous ces deux problèmes en donnant, pour le second, le théorème suivant, qui a été étendu par M. Picard (¹) aux courbes unicursales d'ordre supérieur : La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une courbe unicursale du troisième ordre, située dans un plan, puisse être considérée comme la projection sur ce plan d'une cubique gauche ayant son axe perpendiculaire au plan, est que la courbe ait ses trois points d'inflexion à l'infini.

Passant ensuite aux courbes gauches unicursales du quatrième ordre, je donne (96) les conditions nécessaires et suffisantes pour que les tangentes à l'une de ces courbes appartiennent à un complexe de droites du premier ordre dont je forme l'équation; il existe alors un deuxième complexe qui a des relations simples avec le premier et avec la courbe. Pour obtenir les conditions cherchées, je me sers de ce théorème général (95) que, pour toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe du premier ordre, le déterminant bien connu qui, par son évanouissement, donne les points où le plan osculateur est stationnaire, est un carré parfait. Ainsi, dans le cas actuel, il faut que l'équation du quatrième degré donnant ces points soit un carré parfait. Ces conditions nécessaires sont suffisantes, comme il résulte de l'étude des propriétés des courbes pour lesquelles elles sont satisfaites. Alors les quatre points de la courbe, où le plan osculateur est stationnaire, sont confondus deux à deux avec des points simples en chacun desquels la tangente a trois points communs avec la courbe.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1877.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — INVARIANTS.

Équations différentielles linéaires à une variable indépendante. — Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées. Ainsi Lagrange a démontré que, si l'on connaît une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire, on peut abaisser d'une unité l'ordre de cette équation, de même que l'on peut diminuer d'une unité le degré d'une équation algébrique dont on connaît une racine. La théorie du plus grand commun diviseur de deux polynômes et celle de l'élimination ont conduit MM. Libri, Liouville, Brassinne à des théories analogues sur les équations différentielles linéaires; et ces questions ont été reprises et complétées par MM. Thomé et Frobenius (*Journal de Crelle*, t. 74 et suivants); M. Frobenius a introduit la notion de l'irréductibilité des équations différentielles linéaires (*Journal de Crelle*, t. 76) et a démontré, à ce sujet, plusieurs théorèmes importants suggérés, sans doute, par les théorèmes analogues de la théorie des équations algébriques. La décomposition des polynômes en facteurs a été l'origine de la théorie de la décomposition du premier membre d'une équation différentielle linéaire en facteurs premiers symboliques (Floquet, *Annales de l'École Normale supérieure*, année 1879; Supplément). Le Mémoire fondamental de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 66), qui depuis a été exposé et complété par M. Tannery (*Annales de l'École Normale supérieure*, année 1874) et qui a pour objet l'étude des fonctions définies par une équation différentielle linéaire, présente plus d'une analogie avec le Mémoire célèbre de Puiseux *Sur les fonctions algébriques* (*Journal de Mathématiques*, t. XV); et cette analogie a été poussée à un point inattendu dans un Mémoire de M. Fuchs (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 678 et 735; *Journal de Crelle*, t. 89) *Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles.* Enfin, dans un autre ordre d'idées, la théorie des invariants des formes algébriques a été étendue aux équations différen-

tielles linéaires, dans deux Notes présentées par Laguerre à l'Académie (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224), dans une Communication de M. Brioschi à la *Société mathématique de France* (*Bulletin*, t. VII) et dans le Mémoire couronné d'Halphen *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (*Journal des Savants étrangers*, t. XXVIII, n° 1).

Mais il restait une partie des plus importantes de la théorie des équations algébriques qui n'avait pas encore son analogue dans la théorie des équations différentielles linéaires : je veux dire la partie qui traite des fonctions symétriques des racines d'une équation et de la transformation des équations. C'est ce nouveau Chapitre de la théorie des équations différentielles linéaires que je me suis proposé d'étudier.

J'ai eu d'abord à m'occuper de chercher quelles sont les fonctions des intégrales d'une équation différentielle linéaire qui sont analogues aux fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n; les fonctions, analogues aux fonctions symétriques, sont des fonctions algébriques entières de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées qui se reproduisent, multipliées par un facteur constant différent de zéro, quand on remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$ d'un autre système fondamental. Je forme l'expression générale de ces fonctions et je démontre le théorème fondamental (20) analogue au théorème sur les fonctions symétriques :

Soient

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire sans second membre, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales; toute fonction algébrique entière de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et des dérivées de ces fonctions qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro, quand on remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées, multipliée par une puissance de $e^{-\int a_1 dx}$.

Je donne de ce théorème différentes applications, parmi lesquelles je citerai : 1° une méthode d'élimination de la fonction, entre deux équations différentielles linéaires, semblable à l'élimination algébrique par les fonc-

tions symétriques (69); 2° une méthode générale de formation de certains invariants et semi-invariants des équations différentielles linéaires, à savoir ceux qu'il faut égaler à zéro pour exprimer qu'il y a, entre les éléments d'un système fondamental, une relation algébrique à coefficients constants (20); 3° une méthode générale pour la transformation des équations différentielles linéaires (21); 4° l'intégration de certaines équations linéaires entre les intégrales desquelles il existe une relation algébrique (69).

Équations spéciales. — Comme application des formules de transformation, je considère une classe d'équations différentielles linéaires, à coefficients doublement périodiques, dont on peut toujours trouver l'intégrale générale (26); ces équations sont supposées linéaires et homogènes par rapport à une fonction y et à ses dérivées, et leurs coefficients sont supposés remplir les conditions suivantes. Ce sont des fonctions elliptiques d'une variable x, telles que l'intégrale générale soit régulière et que les racines des équations fondamentales déterminantes, relatives à chaque pôle des coefficients, soient des *nombres commensurables* ayant des différences entières; enfin l'intégrale générale ne doit pas contenir de logarithmes dans le voisinage de ces pôles, ce dont on peut toujours s'assurer par les méthodes de M. Fuchs. Dans ces conditions la fonction

$$z = y^{N},$$

où N désigne un entier positif convenablement choisi, est une fonction *uniforme* de x, sans points singuliers essentiels, satisfaisant à une équation différentielle linéaire que l'on sait former et dont les coefficients sont doublement périodiques. On pourra donc, d'après un théorème de M. Picard, exprimer la fonction z à l'aide des fonctions Θ et H de Jacobi, et en conclure l'expression y de l'intégrale générale de l'équation proposée. J'applique cette méthode à un cas particulier de l'équation de Lamé qui avait déjà, à mon insu, été traité d'une autre façon par M. Brioschi.

Le théorème de M. Picard auquel nous venons de faire allusion consiste en ce que, si l'intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients doublement périodiques est uniforme et n'a pas de points singuliers essentiels, elle peut être exprimée à l'aide de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Supposons que, dans une de ces équations de M. Picard, on remplace la variable indépendante par l'intégrale elliptique de première espèce correspondante; on formera une équation, à coefficients algébriques, dont l'intégrale générale n'aura d'autres points singuliers que des pôles et des

points critiques algébriques et pourra s'exprimer par des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles ayant pour exposants certaines intégrales elliptiques de première et troisième espèce. Présenté de cette façon, le théorème de M. Picard peut être généralisé de la manière suivante (23).

Soit une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et y, la variable y étant liée à x par une équation algébrique $F(x, y) = 0$ de genre p. Je suppose que l'intégrale générale n'ait d'autres points critiques que des pôles ou des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction algébrique y de x; je suppose, de plus, que ces coefficients remplissent des conditions telles que la variation éprouvée par l'intégrale générale, quand le point analytique (x, y) parcourt deux cycles successifs, soit indépendante de l'ordre de succession de ces cycles. Sous ces conditions, l'équation a, pour intégrale particulière, une exponentielle dont l'exposant est composé linéairement avec des intégrales abéliennes de première et troisième espèce, attachées à la courbe algébrique $F(x, y) = 0$. Cette intégrale particulière étant déterminée, l'intégration de l'équation linéaire se ramènera à celle d'une équation d'ordre $(n-1)$ à laquelle on pourra appliquer le même théorème et qui admettra une intégrale de la même forme, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'équation soit intégrée. Lorsque le genre p est égal à l'unité, on peut reconnaître sur l'équation différentielle si les cycles sont permutables, comme je le suppose; en faisant un changement de variable, on obtient alors les résultats de M. Picard sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Lorsque p est plus grand que 1, je n'ai pas encore réussi à reconnaître sur l'équation les conditions de permutabilité des cycles.

En laissant de côté cette condition de permutabilité des cycles, et imposant seulement aux coefficients de l'équation différentielle des conditions telles que l'intégrale générale n'ait d'autres points singuliers que des pôles, des points critiques algébriques et des points critiques logarithmiques, on peut classer les équations différentielles remplissant ces conditions en trois espèces correspondant aux trois espèces d'intégrales abéliennes (60). Les équations de première espèce sont celles dont l'intégrale générale *reste partout finie*; la deuxième espèce comprend les équations dont l'intégrale devient infinie, mais seulement à la manière d'une fonction algébrique; enfin, la troisième espèce comprend celles dont l'intégrale générale a des points critiques logarithmiques. On se trouve alors en présence de ces questions, qu'on peut résoudre à l'aide des principes de M. Fuchs : une rela-

tion algébrique, $F(x, y) = 0$, étant donnée, former, parmi les équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients rationnels en x et y, les équations les plus générales de première, les plus générales de seconde et troisième espèce avec des points singuliers donnés.

Parmi les équations linéaires à coefficients algébriques, j'ai étudié encore (70) des équations différentielles linéaires binômes de la forme

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y) z,$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et y, la variable y étant liée à x par une équation algébrique de genre p. J'indique le moyen de reconnaître si une de ces équations admet pour intégrale particulière une exponentielle dont l'exposant est une intégrale abélienne, et de trouver cette intégrale si elle existe. En appliquant la méthode générale aux cas de $p = 0$ ou $p = 1$, j'arrive ainsi à intégrer une classe nouvelle d'équations linéaires à coefficients rationnels ou doublement périodiques, dans des cas où l'intégrale générale peut n'être pas uniforme et admettre des points singuliers essentiels. La méthode que j'emploie est basée sur les formules de décomposition en éléments simples, d'après la formule de M. Hermite et la formule générale de Riemann-Roch.

Les équations différentielles linéaires, à coefficients simplement ou doublement périodiques, sont caractérisées par ce fait qu'elles ne changent pas de forme, quand on augmente la variable indépendante d'une ou de deux périodes. On peut concevoir des équations différentielles linéaires possédant une propriété du même genre, mais beaucoup plus générale, et indiquer une propriété curieuse d'une de leurs intégrales (27).

Soit une équation différentielle linéaire d'ordre n définissant y en fonction de x; je suppose qu'en changeant la fonction et la variable indépendante, c'est-à-dire en posant $x = \varphi(t)$, $y = z\psi(t)$, on puisse déterminer les deux fonctions φ et ψ, de telle façon que l'équation entre z et t prenne la forme primitive dans laquelle y serait remplacé par z, et x par t. Il existe alors toujours une intégrale particulière $y = F(x)$, de l'équation proposée, qui vérifie la relation

$$F[\varphi(x)] = A\psi(x) F(x),$$

A étant une constante. Dans le cas où $n = 2$, ces deux fonctions φ et ψ existent toujours, et l'on obtient des résultats déjà signalés par Kummer dans son Mémoire sur la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et étendus depuis par divers

géomètres, entre autres par M. Brioschi. J'indique, comme exemple, une équation binôme du second ordre ayant pour coefficient une fonction thêtafuchsienne de M. Poincaré.

Équations linéaires aux dérivées partielles. — A propos de la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables (61), j'ai montré que l'on pouvait démontrer, pour certains systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles, des théorèmes semblables à ceux de M. Fuchs pour les équations différentielles linéaires à une variable indépendante. Cette similitude nous a conduits, M. Picard et moi (24), à étendre, à des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles, le théorème de M. Picard relatif aux équations différentielles à coefficients doublement périodiques. Nous considérons d'abord deux équations simultanées du second ordre

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

admettant quatre intégrales communes linéairement indépendantes et ayant pour coefficients a_i, b_i des fonctions des deux variables indépendantes x et y à quatre paires de périodes conjuguées. Alors, si l'intégrale générale est une fonction uniforme de x et y, les équations admettent une intégrale particulière qui se reproduit, multipliée par des facteurs constants, quand on augmente x et y de couples de périodes et qui, par suite, est analogue aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Ce résultat est ensuite étendu à des systèmes plus généraux d'équations simultanées.

Il est à remarquer que, dans certains cas, notre théorème permet d'intégrer une équation différentielle linéaire ordinaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées par une relation algébrique de genre p. Je montre, en effet (70), que l'intégration d'une équation de cette nature peut être ramenée à celle d'un système de p équations linéaires simultanées aux dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions abéliennes de genre p, c'est-à-dire des fonctions uniformes de p variables à $2p$ groupes de périodes, système auquel on pourra appliquer notre théorème.

Les systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles, dont nous avons parlé jusqu'ici, sont tels que leur intégrale générale contient seulement des *constantes arbitraires*. Si l'on prend une seule équation aux dérivées partielles, son intégrale générale contiendra des *fonctions arbi-*

traires. Parmi ce genre d'équations, j'ai eu à étudier quelques équations linéaires du second ordre dans mon Mémoire sur les *déblais et remblais* (1), une équation linéaire du second ordre possédant des propriétés intéressantes

$$(x-x^2)r+(y-y^2)t-2xys \\ +[\gamma-(\alpha+\delta+1)x]p+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)y]q-\alpha\delta z=0,$$

dans mes recherches sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (61); enfin, à la suite d'une Note de M. Darboux [1], je me suis occupé (84) de l'équation

$$\mathrm{E}(\beta,\beta') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

qui a été traitée par Laplace et dont un cas particulier ($\beta'=\beta$) s'était déjà présenté dans les recherches d'Euler relatives à la propagation du son. C'est également à ce cas particulier que se rapportent les résultats intéressants que M. Darboux a indiqués et que je me suis proposé d'étendre à l'équation générale $\mathrm{E}(\beta,\beta')$. Après avoir établi le théorème suivant :

Si l'on a obtenu une solution quelconque $\varphi(x,y)$ *de l'équation* $\mathrm{E}(\beta,\beta')$, *on pourra en déduire la solution plus générale*

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b},\frac{cy+d}{ay+b}\right)=\varphi_1(x,y),$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques,

j'indique des solutions particulières de l'équation exprimées par des séries hypergéométriques, la solution *entière* la plus générale et enfin une forme particulièrement simple de l'intégrale générale pour le cas où β et β' sont deux nombres entiers de même signe. Poisson a donné, dans le cas où β et β' sont égaux, une forme de l'intégrale générale qui contient deux fonctions arbitraires sous des signes d'intégration définie; j'ai étendu cette formule de Poisson au cas où β et β' sont quelconques; M. Darboux a démontré que l'on a bien ainsi l'intégrale générale. J'ajoute, en terminant cette analyse, que M. Darboux a jugé ces résultats dignes de figurer dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (2e Vol., Chap. III et IV). L'équation $\mathrm{E}(\beta,\beta')$ a été signalée par M. Lie comme le type des équations

[1] *Comptes rendus*, t. XCV, p. 69, 10 juillet 1882.

linéaires du second ordre admettant trois transformations infinitésimales; M. Lie ne s'est, d'ailleurs, pas occupé de l'intégration de l'équation.

Équations différentielles non linéaires. — Parmi les équations différentielles non linéaires, j'ai étudié une classe étendue d'équations *réductibles aux équations linéaires* (51). Ce sont les équations différentielles qui sont algébriques par rapport à la fonction inconnue y et à ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$, qui contiennent d'ailleurs la variable indépendante x d'une façon quelconque et dont l'intégrale générale s'obtient, en prenant l'intégrale générale d'une équation linéaire d'ordre $(n+1)$, et en établissant une relation algébrique entre les constantes arbitraires qui figurent dans cette dernière intégrale. J'indique le moyen de reconnaître si une équation différentielle donnée possède cette propriété et de l'intégrer dans le cas de l'affirmative. Voici comment :

Pour qu'une équation différentielle

$$\psi(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, x) = 0$$

algébrique entière et irréductible par rapport à une fonction y de x et à ses dérivées admette une intégrale de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n+1} y_{n+1},$$

où y_1, y_2, ..., y_{n+1} désignent $(n+1)$ fonctions de x linéairement indépendantes et C_1, C_2, ..., C_{n+1} $(n+1)$ constantes liées par une relation algébrique entière, il faut et il suffit qu'il existe une fonction λ de x telle que l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

se décompose en deux facteurs dont l'un soit linéaire et homogène en $y, y', y'', \ldots, y^{(n+1)}$.

Ce dernier facteur, égalé à zéro, donnera une équation différentielle linéaire ayant pour intégrale générale $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n+1} y_{n+1}$; l'autre facteur, qui est égal à $\frac{\partial\psi}{\partial y^{(n)}}$, pourra donner des intégrales singulières.

Invariants. — Il est une classe générale d'équations qui se présentent

tout naturellement après les équations différentielles linéaires et homogènes : c'est la classe des équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, *mais non linéaires* (49), le degré d'homogénéité étant quelconque. Ces équations partagent, avec les équations différentielles linéaires et homogènes, cette propriété, qu'elles conservent la même forme quand on prend une nouvelle variable indépendante ou qu'on multiplie la fonction inconnue par un facteur quelconque. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire les invariants de l'équation différentielle. La théorie des invariants des équations différentielles linéaires, commencée par MM. Laguerre [1] et Brioschi [2], a reçu son complet développement dans le Chapitre III du Mémoire de Halphen : *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* [3]. M. Roger Liouville [4] a étudié à différents points de vue les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y^3 + 3a_1 y^2 + 3a_2 y + a_3 = 0.$$

L'idée générale et le fait de l'existence des invariants ont été mis en lumière par M. Sophus Lie dans un Ouvrage : *Theorie des Transformations Gruppen,* par Halphen dans une Lettre à M. Sylvester [5] et par M. Goursat [6].

Je me suis proposé d'abord de traiter la théorie des invariants des équations différentielles homogènes mais non linéaires, et je me suis attaché presque exclusivement aux équations du second ordre et du second degré, en donnant des méthodes qui puissent s'étendre aux ordres et degrés supérieurs. L'équation générale homogène et du second degré par rapport à une fonction y et à ses dérivées premières et secondes y', y'' est de la forme

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2' y y'' + 2b_3 y' y = 0,$$

les coefficients a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3 étant des fonctions de la variable indé-

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224.
(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105.
(3) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, n° 1.
(4) *Comptes rendus*, 6 septembre 1886, 12 septembre 1887; *American Journal of Mathematics*, t. X, p. 283.
(5) *American Journal of Mathematics*, t. IX, p. 137.
(6) *Comptes rendus*, 3 décembre 1888.

pendante x. Au point de vue de la théorie des invariants, ces équations se divisent en trois classes, suivant la façon dont la dérivée y'' figure dans l'équation. Dans la première classe se trouvent les équations pour lesquelles a_0 et b_1 sont nuls; dans la deuxième, celles pour lesquelles a_0 est nul, b_1 étant différent de zéro; dans la troisième se trouvent les équations dans lesquelles a_0 est différent de zéro. Cette classification se trouve justifiée par ce fait que le changement de fonction et de variable transforme une équation d'une classe en une autre de la même classe. Après avoir montré que les équations de la première classe peuvent toujours être transformées en équations *linéaires* du second ordre, j'indique (66), pour les équations des deux autres classes, un moyen simple de former *tous leurs invariants;* pour cela je réduis ces équations à une forme canonique contenant, pour la seconde classe, *deux invariants absolus,* et pour la troisième *trois*. Tous les autres invariants sont alors des fonctions rationnelles de ces invariants absolus et de leurs dérivées successives par rapport à la variable canonique. Comme application, j'indique les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une de ces équations soit réductible à une autre de même forme à coefficients *constants* et pour qu'elle admette un facteur intégrant : ces conditions s'obtiennent en égalant certains invariants à zéro. Dans les équations de la troisième classe, j'étudie en détail celles dont l'intégrale générale est un trinôme homogène du second degré par rapport aux deux constantes arbitraires. On reconnaît qu'une équation possède cette propriété en vérifiant que deux invariants sont nuls; l'intégration est alors facile; à côté de l'intégrale générale, l'équation admet, dans ce cas, *deux intégrales singulières.*

Parmi les équations différentielles homogènes d'un ordre et d'un degré quelconques, les plus simples sont les équations à *coefficients constants.* Ainsi qu'on le fait pour les équations linéaires et homogènes, on peut en trouver des solutions ayant la forme spéciale Ce^{rx}, C désignant une constante arbitraire et r une constante racine d'une équation algébrique. Dans le cas des équations linéaires, les solutions ainsi obtenues sont toutes *particulières :* on peut se demander s'il en est encore ainsi lorsque l'équation différentielle homogène n'est plus linéaire. Je donne (77) la solution de cette question pour les équations différentielles homogènes du second ordre de degré arbitraire. Certaines de ces intégrales peuvent être *particulières,* d'autres *singulières :* j'indique un moyen simple de les distinguer les unes des autres. Il peut arriver que, dans des cas limites, toutes les intégrales de la forme Ce^{rx} soient particulières ou toutes singulières. Je traite, en particulier, à titre d'exemple, le cas d'une équation homogène

du second ordre et du second degré qui admet quatre solutions de la forme Ce^{rx} : lorsque deux de ces solutions sont singulières, l'intégrale générale est un polynôme homogène et du second degré par rapport aux deux constantes arbitraires.

J'ai également étudié (66) les invariants des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n}{b_0+b_1y+\ldots+b_py^p} \qquad (p<n),$$

qui conservent la même forme, quand on choisit une nouvelle fonction inconnue η et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et x par les relations

$$y=\eta u(x)+\varphi(x), \qquad \frac{d\xi}{dx}=\mu(x),$$

$u(x)$, $\varphi(x)$ et $\mu(x)$ désignant des fonctions indéterminées de x. On obtient encore, d'une façon simple, les invariants de ces équations relatifs à ce changement de fonction et de variable, en réduisant l'équation à une forme canonique dont les coefficients sont des invariants absolus : un invariant quelconque est alors une fonction de ces invariants absolus et de leurs dérivées par rapport à la variable canonique. Comme application, je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation puisse être réduite à une autre de même forme à coefficients constants, dont l'intégration se ramène immédiatement aux quadratures. Si on laisse de côté l'équation linéaire et l'équation de Riccati, l'équation la plus simple de l'espèce considérée ($n=3$, $p=0$) a déjà été étudiée par M. Roger Liouville (¹). Je montre qu'on peut la ramener à une forme canonique ne contenant qu'un invariant absolu, dont le numérateur est un invariant relatif donné par M. R. Liouville. Je donne le moyen de trouver les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent lier les coefficients de l'équation primitive pour qu'elle soit réductible à une forme canonique donnée : on arrive, de cette façon, à exprimer les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir ces coefficients pour que l'équation soit réductible à certaines formes intégrables.

Équations différentielles intégrables à l'aide des fonctions Θ de plusieurs variables. — Le théorème de Riemann, donnant les zéros des fonctions Θ de plusieurs variables, permet de former des équations différentielles *algé-*

(¹) *Comptes rendus*, 6 septembre 1886, 12 septembre 1887

briques intégrables à l'aide de ces fonctions (19). Prenons, pour simplifier, le cas d'une fonction $\Theta(x, y)$ de deux variables x et y, formée avec les périodes normales des deux intégrales ultra-elliptiques normales de première espèce

$$\int \frac{(\alpha u + \beta)}{\sqrt{f(u)}} du, \quad \int \frac{(\alpha' u + \beta')}{\sqrt{f(u)}} du,$$

$f(u)$ désignant un polynôme du cinquième degré

$$f(u) = (a_1 u + b_1)(a_2 u + b_2) \ldots (a_5 u + b_5).$$

Puis, considérons l'équation

$$\Theta(x + \mathrm{A}, y + \mathrm{B}) = 0,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Cette équation définit y en fonction de x; si l'on veut employer un langage géométrique, on peut dire que cette équation définit, par rapport à deux axes rectangulaires $x\mathrm{O}y$, une infinité de courbes qui ne font que se transporter parallèlement à elles-mêmes quand les constantes A et B varient. On formera l'équation différentielle du second ordre de toutes ces courbes, en éliminant A et B entre l'équation ci-dessus et ses deux premières dérivées. L'équation différentielle ainsi formée est *algébrique;* la voici :

$$\begin{aligned}&(dx\, d^2y - dy\, d^2x)(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 \\ &\quad = \sqrt{(\alpha\, dy - \alpha'\, dx)(\lambda_1\, dy - \mu_1\, dx)(\lambda_2\, dy - \mu_2\, dx) \ldots (\lambda_5\, dy - \mu_5\, dx)},\end{aligned}$$

où

$$\lambda_i = \alpha b_i - \beta a_i, \qquad \mu_i = \alpha' b_i - \beta' a_i.$$

Géométriquement, cette équation est ce qu'on appelle quelquefois l'équation *intrinsèque* de la courbe, donnant le rayon de courbure en fonction de l'angle de la tangente avec une direction fixe.

Cette proposition peut s'étendre à des fonctions Θ d'un nombre quelconque de variables.

THÉORIE DES FONCTIONS.

Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. — Le théorème de Cauchy donne le développement en série entière d'une fonction holomorphe dans l'intérieur d'un cercle; celui de Laurent, le développement d'une fonction holomorphe dans l'aire comprise entre deux circonférences concentriques. Je considère (32), d'une manière générale, une aire S limitée par des arcs de cercle tournant tous leurs convexités vers l'intérieur de l'aire, et ayant pour centres respectifs les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et je démontre que toute fonction $f(x)$ *holomorphe dans cette aire* est développable en une série de la forme

$$f(x)=\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{A_\nu^{(k)}}{(x-\alpha_k)^\nu}$$

convergente en tous les points de l'aire. Mais cette série a, de plus, la propriété singulière suivante : elle converge encore en tous les points de l'aire indéfinie située à l'*extérieur de tous les cercles, et sa somme est alors égale à zéro*. Voilà donc un développement qui est convergent en deux parties du plan séparées l'une de l'autre, et qui, dans une des parties, a pour somme $f(x)$ et dans l'autre zéro. C'est M. Weierstrass qui a signalé le premier ce fait singulier sur un exemple qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques; après lui, M. Tannery en a donné un exemple beaucoup plus simple. On voit que notre méthode, très générale, permet de représenter toute fonction analytique uniforme par un développement de ce genre, dans une aire choisie convenablement. Par exemple, la série (55)

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n2^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{1}{(1+ix)^n}+\frac{1}{(1+x)^n}+\frac{1}{(1-ix)^n}\right]$$

a pour somme 1 dans une partie du plan et zéro dans l'autre. On peut conclure de là un moyen de former une série de fractions rationnelles, conver-

gente dans plusieurs aires séparées, et représentant une fonction $f_1(x)$ dans une des aires, une autre fonction $f_2(x)$ dans une autre des aires, et ainsi de suite, de sorte que, dans chacune des aires, la série représente une fonction différente. On peut faire (81), sur les développements de ce genre, cette remarque que, *si les cercles limitant l'aire* S *n'ont aucun point commun, le développement en série, par notre méthode, n'est possible que d'une manière;* c'est ce qui arrive dans les théorèmes de Cauchy et Laurent; *si, au contraire, deux ou plusieurs de ces cercles se coupent ou seulement se touchent, le développement est possible d'une infinité de manières.* Par exemple, si le cercle de centre α_1 a un point commun avec un autre cercle limite, on peut prendre arbitrairement certains des coefficients correspondants en nombre aussi grand qu'on le veut.

Il est possible de généraliser considérablement ces résultats (92) et de former le développement d'une fonction $f(x)$, holomorphe dans l'aire S limitée par des arcs de cercles de centres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, en série de la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{d^\nu \psi(\alpha_k - x)}{dx^\nu},$$

où $\psi(x)$ désigne une fonction uniforme donnée qui a pour pôle simple le point $x = 0$, et qui possède d'autres pôles quelconques en nombre fini ou infini. En général, ce développement est encore convergent dans des aires autres que S, et représente dans ces aires des fonctions entièrement différentes de $f(x)$: j'examine les divers cas qui peuvent se présenter, et dont la discussion ne saurait trouver place ici. Je me borne à dire que des cas particuliers dignes d'intérêt sont ceux qui consistent à prendre pour $\psi(x)$ la fonction $\cot x$ ou $Z(x) = \frac{H'(x)}{H(x)}$. M. Hermite m'a fait l'honneur de donner à ces résultats une place dans son cours à la Faculté des Sciences.

J'ai formé (37) par un procédé analogue des développements en série, propres à représenter une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs d'ellipse et, comme cas limite, par des segments de droites. J'en conclus une forme de développement en série pouvant représenter, *pour toutes les valeurs de la variable,* l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont uniformes et ont un nombre fini de points singuliers; car cette intégrale est holomorphe à l'extérieur d'un contour fermé infiniment rapproché de la ligne brisée obtenue en joignant par des droites les points singuliers dans un ordre quelconque.

Fonctions d'un point analytique. — Le célèbre Mémoire de M. Weierstrass sur les fonctions analytiques uniformes (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1876) a été le point de départ d'un grand nombre de travaux sur la théorie des fonctions, parmi lesquels je citerai ceux de MM. Mittag-Leffler, Picard, Poincaré, Goursat. M. Weierstrass partage les points singuliers d'une fonction analytique uniforme en deux catégories : les *pôles* et les *points singuliers essentiels*. Un pôle est nécessairement *isolé*, c'est-à-dire qu'on peut décrire du pôle comme centre un cercle assez petit pour qu'il ne contienne pas d'autre point singulier; un point singulier essentiel au contraire n'est pas nécessairement isolé. M. Weierstrass ayant démontré qu'on peut former une fonction entière avec des zéros donnés d'avance, M. Mittag-Leffler a démontré de même que l'on peut former une fonction avec des singularités données d'avance en nombre infini et il a formé l'expression générale de ces fonctions.

Je me suis proposé (54) de traiter, suivant les idées de M. Weierstrass, la théorie des fonctions *uniformes d'un point analytique :* voici ce que l'on entend par cette dénomination. Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique irréductible représentant une courbe d'ordre m et de genre p; on appelle *point analytique* (x, y) le système des deux nombres formé par une valeur quelconque attribuée à x et par une des m valeurs correspondantes de y. Une fonction de la variable x sera dite *fonction uniforme du point analytique* (x, y) *si cette fonction n'a qu'une valeur en chaque point* (x, y); telle serait, par exemple, une fonction rationnelle de x et y. Si l'on convient, avec Riemann, de représenter le point (x, y) par un point d'une surface composée de m feuillets superposés, la fonction sera uniforme sur cette surface. J'étends d'abord à ces fonctions la notion de pôles et de points singuliers essentiels, puis je donne l'expression générale d'une de ces fonctions avec un nombre fini de points singuliers, pôles ou points singuliers essentiels. L'élément analytique à l'aide duquel nous exprimons ces fonctions est l'*intégrale abélienne normale de seconde espèce* attachée à la courbe $F(x, y) = 0$. Cette intégrale est, comme l'on sait, une fonction du point analytique (x, y) finie partout, excepté en un point $x = \xi$, $y = \eta$ où elle devient infinie du premier ordre avec un résidu égal à l'unité; je la désigne par $Z(\xi, \eta)$, en mettant ainsi en évidence le point (ξ, η) où elle devient infinie. Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* du paramètre (ξ, η) ayant pour pôles les points critiques et les points (x, y) et (x_0, y_0), ces derniers avec des résidus -1 et $+1$, comme il résulte du théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument dans les intégrales

de troisième espèce. Elle joue, dans cette théorie, le même rôle que la fonction $\frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}$ dans la théorie des fonctions uniformes de x. Ainsi l'expression générale d'une fonction $f(x, y)$, ayant le seul point singulier (a, b), est

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b),$$

où $Z^{(\nu-1)}(\xi, \eta)$ désigne la dérivée d'ordre $(\nu - 1)$ de $Z(\xi, \eta)$ par rapport à ξ, et cette expression est entièrement analogue à l'expression

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} \frac{d^{\nu-1}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x_0 - a}\right)}{da^{\nu-1}}$$

d'une fonction uniforme $f(x)$ ayant le seul point singulier a. Comme dans la théorie de M. Weierstrass, une fonction $f(x, y)$ ayant plusieurs points singuliers est la somme de plusieurs expressions analogues à la précédente.

Il y a cependant entre les deux théories une différence considérable qu'il importe de signaler en peu de mots : c'est que, dans les expressions que donne M. Weierstrass pour les fonctions uniformes d'une variable x, *les coefficients des séries sont arbitraires,* tandis que, dans les expressions des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y), *les coefficients des séries sont assujettis à vérifier p relations* qu'il serait trop long d'indiquer ici.

Nos formules se déduisent toutes par un procédé uniforme du théorème suivant :

Si l'on forme, d'une part, la somme des résidus d'une fonction uniforme d'un point analytique ayant un nombre fini de points singuliers et, d'autre part, la somme des coefficients de x^{-1} *dans les développements des m déterminations de la fonction au voisinage du point* ∞*, ces deux sommes sont égales.*

Passant ensuite à l'étude des fonctions qui ont une infinité de points singuliers, je démontre à leur égard un théorème qui est la généralisation de celui de M. Mittag-Leffler et qui permet de *former une fonction uniforme du point analytique* (x, y) *n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point* (a, b) *et admettant, pour pôles, les points* (a_ν, b_ν),

avec des parties principales données d'avance, le point (a_ν, b_ν) *étant assujetti à tendre vers* (a, b) *quand* ν *croît indéfiniment.* Comme je l'ai appris depuis par M. Mittag-Leffler, ce théorème avait été trouvé, mais non publié, par M. Weierstrass, avec qui je suis très honoré de m'être rencontré sur ce point. J'étends, de même, aux fonctions d'un point analytique, la méthode de décomposition en facteurs primaires que M. Weierstrass a indiquée pour former une fonction uniforme avec des zéros donnés, et je suis conduit à l'expression générale d'une fonction d'un point analytique admettant un seul point singulier essentiel et des zéros en nombre infini se rapprochant indéfiniment de ce point essentiel. Ces théorèmes généraux sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) conduisent, dans le cas particulier où le genre p est égal à l'unité, à des théorèmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques. On peut alors exprimer x et y par des fonctions elliptiques d'un paramètre u, de sorte que toute fonction uniforme du point (x, y) devienne fonction uniforme de u, et réciproquement. On arrive ainsi à étendre les théorèmes de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels dont MM. Hermite [1] et Picard [2] ont donné des expressions générales.

La formule célèbre connue sous le nom d'*intégrale de Cauchy* peut, de la façon suivante (34), être étendue aux fonctions d'un point analytique :

Traçons sur l'un des feuillets d'une surface de Riemann une courbe fermée C *qui ne comprend dans son intérieur aucun point de ramification de la surface; soient* $f(x, y)$ *une fonction du point analytique* (x, y) *uniforme et régulière sur toute la portion de la surface de Riemann extérieure à* C, *et* (x, y), (x_0, y_0) *deux points de cette portion de surface, on a*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_C Z(\xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe C.

On déduit de cette formule des développements en série pour les fonc-

(1) Cours professé à la Faculté des Sciences.

(2) *Comptes rendus*, novembre 1879.

tions d'un point (x, y) holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercles, analogues à ceux que j'ai donnés pour les fonctions uniformes d'une variable (32). Lorsque le genre p est égal à 1, on obtient une formule intéressante relative aux fonctions doublement périodiques.

Théorème de M. Mittag-Leffler. — Les applications du théorème de M. Mittag-Leffler à des fonctions connues sont encore peu nombreuses. Dans celles que M. Weierstrass a indiquées pour les fonctions elliptiques, le polynôme retranché de la partie principale est du premier degré. M. Hermite, dans une Lettre à M. Mittag-Leffler insérée au tome 92, page 145 du *Journal de Crelle*, a donné des exemples obtenus par des combinaisons de fonctions eulériennes, dans lesquels il faut retrancher des fractions simples un polynôme de degré limité mais quelconque. Enfin, dans son *Cours à la Faculté des Sciences*, M. Hermite a considéré d'autres combinaisons de fonctions eulériennes pour lesquelles le degré du polynôme à retrancher de chaque fraction simple est proportionnel au rang de cette fraction dans la série et, par suite, croît au delà de toute limite. J'indique une nouvelle application du même théorème, dans laquelle les degrés des polynômes que l'on retranche de la partie principale croissent indéfiniment; cette application est relative aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce, obtenues, comme l'on sait, en divisant un produit de fonctions Θ par un autre produit de même forme; je m'attache surtout au cas où il y a plus de Θ au numérateur qu'au dénominateur; car, dans le cas inverse, la série des fractions simples converge d'elle-même. Cette application du théorème de M. Mittag-Leffler permet de retrouver la formule de décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, en éléments simples, que j'avais obtenue antérieurement (71).

Fonctions de plusieurs variables. — Potentiel. — Les théorèmes de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler se rapportent à des fonctions analytiques d'une variable indépendante. Une question qui se présente tout d'abord est de voir s'il existe, pour les fonctions analytiques de plusieurs variables, des propositions du même genre. C'est ce que j'ai fait (56), pour une classe particulière de fonctions de deux variables indépendantes, en appliquant ensuite les théorèmes généraux ainsi obtenus à la formation de certaines fonctions simplement périodiques de deux variables.

Mes principales recherches sur les fonctions de plusieurs variables ont porté, non plus sur la théorie des fonctions de variables imaginaires, mais

sur la théorie du *potentiel* (57), c'est-à-dire des fonctions de trois variables réelles x, y, z vérifiant, là où elles existent, l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

En convenant de considérer x, y, z comme les coordonnées d'un point M par rapport à trois axes rectangulaires, une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ pourra être définie dans tout l'espace ou seulement dans une portion de l'espace, en exceptant certains points, ou certaines lignes ou certaines surfaces. La théorie de ces fonctions se rapproche tout naturellement de celle des fonctions d'une variable imaginaire $u = x + iy$, si l'on se rappelle que la partie réelle d'une fonction analytique de u vérifie une équation aux dérivées partielles analogue, mais à deux termes seulement. MM. Thomson et Tait ont montré qu'il existe une suite de fonctions $V_\nu(x, y, z)$ définies pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de l'indice ν, homogènes et du degré ν en x, y, z. Ces fonctions jouent, dans la présente théorie, le même rôle que la partie réelle de l'expression $(a + bi)(x + yi)^\nu$ dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Par exemple, une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation du potentiel uniforme, finie et continue dans l'intérieur d'une sphère ayant pour centre l'origine, y est développable en une série procédant suivant les fonctions V_ν à indices positifs; une fonction $F(x, y, z)$ uniforme, finie et continue entre deux sphères ayant pour centre commun l'origine, est développable dans cet espace en une double série procédant suivant les fonctions V_ν à indices positifs et négatifs; théorèmes tout semblables à ceux de Cauchy et de Laurent pour les fonctions d'une variable imaginaire. Je montre, en général, qu'il existe des développements en série, propres à représenter une fonction F uniforme et admettant des dérivées en tous les points d'un volume limité par des portions de surfaces sphériques, développements qui présentent les mêmes particularités que ceux que j'ai donnés (32), pour des fonctions analytiques d'une variable, holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercle. Je déduis ces propositions du théorème de Green.

Prenant ensuite une fonction $F(x, y, z)$ finie, continue et uniforme dans tout l'espace, sauf en certains points singuliers, je m'occupe d'abord de classer ces points en pôles et points singuliers essentiels; ce qui se fait aisément à l'aide des fonctions V_ν; puis je définis le *résidu* de la fonction en un pôle ou en un point essentiel isolé. Les points singuliers étant ainsi classés, j'indique l'expression la plus générale d'une fonction n'ayant que

des pôles : une fonction de cette nature doit être regardée comme analogue à la partie réelle d'une fonction rationnelle d'une variable imaginaire; elle est égale à une somme de fonctions de la forme $V_\nu(x-a, y-b, z=c)$ à indices positifs ou négatifs. En supposant ensuite une fonction qui possède un nombre fini de points singuliers, parmi lesquels des points singuliers essentiels, je donne l'expression générale de cette fonction sous forme d'une somme de fonctions n'ayant chacune qu'un point singulier. Je démontre enfin, pour les fonctions vérifiant l'équation du potentiel $\Delta F = 0$, un théorème analogue à celui de Cauchy sur la somme des résidus relatifs aux pôles situés dans un contour, et un théorème analogue à celui de Mittag-Leffler fournissant l'expression d'une fonction $F(x, y, z)$ ayant, pour pôles, un nombre infini de points donnés, avec des parties principales assignées à l'avance.

Pour appliquer ces théorèmes généraux à des exemples intéressants par eux-mêmes, j'ai fait une étude générale des fonctions $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation du potentiel et admettant trois groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''); j'entends par là que ces fonctions $F(x, y, z)$ prennent aux points

$$(x+a, y+b, z+c), \quad (x+a', y+b', z+c'), \quad (x+a'', y+b'', z+c'')$$

les mêmes valeurs qu'au point (x, y, z). On peut représenter cette propriété par une image géométrique fort simple. Considérons les trois segments de droites partant de l'origine O, pour aboutir aux trois points (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), et sur ces trois segments construisons un parallélépipède; sur les faces de ce parallélépipède, plaçons des parallélépipèdes égaux et orientés de la même façon; puis, faisons la même opération pour les nouveaux parallélépipèdes et ainsi de suite, indéfiniment, de manière à remplir tout l'espace d'un réseau de parallélépipèdes égaux et orientés de la même façon, se touchant par leurs faces égales. La fonction $F(x, y, z)$ possède cette propriété, qu'elle reprend les mêmes valeurs aux points placés de la même façon dans tous ces parallélépipèdes : ainsi, si elle prend une certaine valeur au centre du premier, elle reprendra la même aux centres de tous les autres. Il suffira, d'après cela, de connaître la fonction $F(x, y, z)$, dans un de ces parallélépipèdes que nous appelons *parallélépipède élémentaire*, pour la connaître dans tout l'espace. On voit que ces fonctions $F(x, y, z)$ sont semblables à la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire $u = x + iy$, qui reprend les mêmes valeurs aux points d'un plan placés de la même façon dans un

réseau de parallélogrammes. Cette similitude se poursuit dans la plupart des propriétés; ainsi :

Une fonction $F(x, y, z)$ *finie en tous les points d'un parallélépipède élémentaire est une constante. Si la fonction admet dans un parallélépipède élémentaire un nombre fini de points singuliers, la somme des résidus relatifs à ces points est nulle.*

Jusqu'ici ces fonctions sont conçues seulement *in abstracto;* il s'agit d'avoir leurs expressions analytiques. Pour cela, je commence par construire, à l'aide d'une série, une fonction $Z(x, y, z)$ vérifiant l'équation du potentiel et présentant la plus grande analogie avec la fonction $Z(u) = \frac{H'(u)}{H(u)}$ à l'aide de laquelle on peut, comme l'a montré M. Hermite, représenter toutes les fonctions *elliptiques*. La fonction $Z(x, y, z)$ nous permettra, de même, de représenter toutes les fonctions $F(x, y, z)$ ayant dans un parallélépipède un nombre fini de points singuliers : elle est essentiellemeut définie par la condition d'avoir, pour pôles du premier degré avec le résidu $+1$, *tous les sommets du réseau des parallélépipèdes.* Par l'application du théorème analogue à celui de Mittag-Leffler, que j'ai donné pour les fonctions vérifiant l'équation du potentiel, j'arrive à écrire cette fonction $Z(x, y, z)$ sous forme d'une série qui converge absolument, c'est-à-dire indépendamment de l'ordre dans lequel on prend ses termes. Cette fonction n'admet pas les groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), pas plus que la fonction $Z(u)$ n'admet les deux périodes des fonctions elliptiques : elle vérifie des équations de la forme suivante

$$Z(x + a,\ y + b,\ z + c) - Z(x, y, z) = Ax + By + Cz + E, \quad \ldots,$$

les lettres A, B, C, E désignant des constantes qui dépendent des neuf quantités $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$; ces constantes sont liées par des relations que l'on établit *a priori*, et qui permettent de les calculer dans certains cas, autrement que par des séries, par exemple dans le cas où les parallélépipèdes élémentaires sont des *cubes* (41). La fonction $Z(x, y, z)$ une fois construite, on a très simplement l'expression d'une fonction F n'ayant que des pôles, par une somme composée de fonctions Z et de leurs dérivées. Je donne ensuite l'expression d'une fonction F avec un nombre fini de points singuliers parmi lesquels il y a des points essentiels, puis j'étends à ces fonctions F certains résultats que j'avais démontrés auparavant (31) pour les fonctions doublement périodiques. Lorsque l'on fait croître indé-

finiment une ou deux dimensions des parallélépipèdes élémentaires, on obtient des fonctions n'ayant que *deux* ou *un* groupe de périodes : parmi ces dernières se trouve une fonction qui a été employée par M. Chervet pour exprimer le potentiel d'une masse liquide limitée par deux plans parallèles, et traversée par un flux permanent d'électricité. J'ai donné depuis d'autres applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à des questions de *Physique mathématique* du même genre (58) : ces applications se trouvent analysées plus loin.

Dans la théorie des fonctions simplement et doublement périodiques d'une variable, les expressions de ces fonctions par des séries simples de sinus et de cosinus sont de la plus haute importance, principalement pour les applications. Je me suis proposé de développer, de la même façon, les fonctions $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ et admettant *un, deux ou trois groupes de périodes*. La possibilité de ces développements est certaine d'après le théorème de Fourier. De même que, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques holomorphes, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans le plan comme $\cot u$ ou $\operatorname{sn} u$; dans la théorie des fonctions de trois variables x, y, z vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques régulières en tous les points à distance finie, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans l'espace, le mot *pôle* étant employé ici dans le sens que nous lui avons donné précédemment. Ces fonctions périodiques se présentent dans la résolution de différentes questions de Physique mathématique, ainsi qu'il résulte d'une remarque de Riemann (1), de plusieurs Notes présentées à l'Académie des Sciences par MM. Boussinesq (2), de Saint-Venant et Flamant (3), et Chervet (4). Les développements en séries trigonométriques que j'ai trouvés se prêtent facilement au calcul numérique; ils présentent une analogie intéressante avec ceux des fonctions simplement et doublement périodiques d'une variable complexe. Les fonctions dont je donne le développement sont les suivantes :

1° D'abord une fonction $\mathfrak{S}_1$ ayant pour pôles les points de l'axe Ox

(1) *Schwere, Electricität und Magnetismus*, bearbeitet von Hattendorff, p. 84.
(2) 3, 31 janvier, 30 mai 1870.
(3) 3, 10, 24 avril 1882; 12, 19 novembre 1883.
(4) 24 septembre 1883; 11 février 1884.

d'abscisses ma (m entier). Cette fonction est développable en une série procédant suivant les cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$; le coefficient du terme général s'exprime à l'aide d'une intégrale définie qui se rattache aux fonctions de Bessel et qui a été employée par Riemann dans la solution d'une question de Physique mathématique : *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe* (1). La fonction que Riemann introduit pour résoudre ce problème est une combinaison linéaire des fonctions $\mathfrak{S}_1$; de même la fonction introduite par M. Chervet (2), dans un autre problème de Physique, est une différence de deux fonctions $\mathfrak{S}_1$.

2° La seconde fonction, $\mathfrak{S}_2$, a pour pôles les points du plan xOy de coordonnées ma, nb (m et n entiers); elle se présente dans différentes questions de Physique, notamment dans la détermination du potentiel en un point d'une masse fluide indéfinie, ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle, traversée par un flux d'électricité (42), ou dans l'évaluation des vitesses aux différents points d'un liquide qui s'écoule par le fond d'un vase prismatique à base rectangle (3), enfin dans la détermination de la fonction de Green pour un prisme droit indéfini à base rectangle. Dans tout l'espace situé d'un même côté du plan des coordonnées xy, par exemple pour toutes les valeurs positives de z, cette fonction et toutes ses dérivées sont développables en séries trigonométriques, procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$ et $\frac{2\pi y}{b}$, dont les coefficients ont des valeurs fort simples que j'indique. Les coefficients des deux développements précédents s'obtiennent à l'aide d'une formule tirée de la théorie des fonctions θ.

3° Enfin la troisième fonction est la fonction $Z(x, y, z)$, qui sert à former des potentiels à trois groupes de périodes, avec cette restriction que les parallélépipèdes élémentaires sont des rectangles. Cette fonction intervient dans l'expression de la fonction de Green dans l'intérieur d'un parallélépipède rectangle ou du potentiel d'une masse liquide traversée par un flux permanent d'électricité et ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Je donne un développement de cette fonction Z en série trigonométrique, valable en tous les points de l'espace compris entre deux faces opposées d'un des parallélépipèdes élémentaires, ces faces étant prolongées indéfiniment :

(1) *Riemann's Gesammelte mathematische Werke*, p. 54.
(2) *Comptes rendus*, 24 septembre 1883.
(3) *Voyez* différentes Notes de M. Boussinesq (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 3 et 31 janvier, 30 mai 1870).

les coefficients de ce développement s'obtiennent, sous forme finie, par l'application des théorèmes généraux relatifs aux fonctions F vérifiant l'équation $\Delta F = 0$. Ce développement, qui se rapproche d'une façon intéressante de celui de $\log \theta(x+yi)\,\theta(x-yi)$, s'appliquera, par exemple, à l'expression de la fonction de Green pour l'intérieur d'un parallélépipède rectangle, telle qu'elle a été donnée par Riemann.

Potentiels multiformes. — Les fonctions précédentes sont des fonctions *uniformes* de trois variables réelles x, y, z vérifiant l'équation aux dérivées partielles du potentiel. A la suite d'une conversation dans laquelle le savant professeur M. Klein, de l'Université de Göttingen, m'avait parlé de l'intention qu'il avait d'étudier les potentiels non uniformes, analogues aux parties réelles des fonctions algébriques d'une variable complexe, je lui communiquai (93) l'exemple suivant d'une fonction de ce genre. La partie réelle de

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a-a'i)^2+(y-b-b'i)^2+(z-c-c'i)^2}},$$

où $x, y, z, a, b, c, a', b', c'$ sont réels, est une fonction $W(x, y, z)$ vérifiant l'équation du potentiel $\Delta W = 0$ et admettant, pour ligne singulière, un cercle ; lorsque la variable (x, y, z) partant d'un point (x_0, y_0, z_0) décrit une courbe fermée C revenant en ce point, la fonction $W(x, y, z)$ suivie par continuité reprend ou non sa valeur initiale, suivant que la courbe C passe un nombre pair ou impair de fois dans le cercle. On a bien là une propriété analogue à celle de la fonction algébrique $\sqrt{u-a}$, d'une variable complexe u, relativement aux chemins entourant le point critique a.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Mes travaux sur les fonctions elliptiques sont purement théoriques, sauf une application à un problème de la théorie des déblais et remblais (1), et une Note sur la chaînette sphérique (83), dans laquelle je résous, à l'aide de ces fonctions, le problème de l'équilibre d'une chaîne homogène pesante sur une sphère.

Sur un problème d'interpolation relatif aux fonctions elliptiques. — La formule d'interpolation de Lagrange donne immédiatement la solution de la question suivante :

Former une fraction rationnelle de degré n dont les infinis, au nombre de n, sont connus et qui prend des valeurs données pour $(n+1)$ *valeurs particulières attribuées à la variable.*

Je me suis proposé (85) de résoudre une question analogue qui peut s'énoncer ainsi :

Former une fonction elliptique d'ordre n dont les infinis, situés dans un parallélogramme élémentaire, sont connus et qui prend des valeurs données pour n valeurs attribuées à la variable.

Ce problème se résout par une formule entièrement semblable à celle de Lagrange, avec cette différence que, dans un cas particulier, le problème est impossible ou indéterminé.

Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en séries trigonométriques des fonctions elliptiques. — Les fonctions elliptiques obtenues d'abord par Abel et Jacobi, sous forme d'un quotient de deux fonctions entières, ont été développées par Jacobi en séries trigonométriques simples. La méthode que je donne, pour obtenir les coefficients de ces derniers développements, repose sur la résolution d'un système d'équations

linéaires (82); elle fournit directement l'expression du *multiplicateur et du module en produits infinis,* sans que l'on soit obligé de passer par l'intermédiaire de la fonction $\varphi(q)$ de Jacobi.

Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. — On sait que les fonctions elliptiques sont des fonctions d'une variable z, qui se comportent, pour toutes les valeurs finies de la variable, comme des fonctions rationnelles, et qui ne changent pas de valeur quand on ajoute à la variable l'une ou l'autre des deux périodes ω et ω'. M. Hermite donne le nom de *fonctions doublement périodiques* de seconde espèce à des fonctions qui se comportent, pour les valeurs finies de la variable, comme des fonctions rationnelles et qui se reproduisent, multipliées par des facteurs constants, quand on augmente la variable de l'une ou l'autre des deux périodes ω et ω'. Ces fonctions de seconde espèce se sont présentées d'abord dans la solution, que Jacobi a donnée, du problème du mouvement d'un corps solide, mobile autour d'un point fixe, qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. De nombreuses et importantes applications de ces fonctions ont été indiquées par M. Hermite, dans son Ouvrage intitulé : *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (Gauthier-Villars, 1885); nous citerons, entre autres, l'intégration de l'équation de Lamé, que M. Picard a rattachée à une théorie générale, en montrant que l'on peut, à l'aide des fonctions de seconde espèce, exprimer l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques, lorsque cette intégrale est uniforme. Il existe enfin des fonctions que M. Hermite appelle *fonctions doublement périodiques* de troisième espèce : ces fonctions se comportent comme des fractions rationnelles pour toutes les valeurs finies de la variable z, et se reproduisent, multipliées par des exponentielles du premier degré par rapport à z, quand on augmente z de l'une ou de l'autre des périodes ω et ω'.

On peut exprimer toutes ces fonctions à l'aide de la fonction $\Theta(z)$ de Jacobi, ou $\sigma(z)$ de M. Weierstrass : les fonctions de première et seconde espèce, par une exponentielle du premier degré en z multipliée par le quotient de deux produits de fonctions Θ contenant autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur; les fonctions de troisième espèce, par une exponentielle du second degré en z multipliée par le quotient de deux produits de fonctions Θ ne contenant pas le même nombre de facteurs au numérateur qu'au dénominateur; les fonctions de troisième espèce se divisent donc en deux groupes : 1° celles où il existe plus de fonctions Θ au dénomi-

nateur qu'au numérateur; 2° celles où, au contraire, il existe plus de fonctions Θ au numérateur.

Pour les fonctions doublement périodiques de première et deuxième espèce, M. Hermite a indiqué un autre mode d'expression, mettant en évidence les points où ces fonctions deviennent infinies et la façon dont elles y deviennent infinies; la formule de M. Hermite, appelée *formule de décomposition* en éléments simples, est analogue à la formule de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples et est, comme cette dernière formule, de la plus haute importance pour l'intégration et le développement en série des fonctions de première et seconde espèce.

Pour les fonctions doublement périodiques de troisième espèce, il n'existait pas de formule analogue : la difficulté était de trouver la nouvelle fonction devant servir d'élément de décomposition. C'est cette fonction que j'ai réussi à former (71); ici, je demande la permission de citer, dans le *Traité des fonctions elliptiques* du regretté Halphen, un passage auquel le sentiment de vive sympathie que j'ai toujours eu pour l'auteur me fait attacher le plus grand prix : « Au Chapitre XIII, nous avons trouvé les développe- » ments de plusieurs fonctions de troisième espèce, les inverses des fonc- » tions σ, les inverses de leurs produits deux à deux. Ces développements » et beaucoup d'autres analogues avaient été formés par M. Biehler dans » une thèse remarquable, dont on doit recommander l'étude (¹); mais » c'est M. Appell qui, en créant le nouvel élément simple, a conduit cette » partie de la théorie au plus haut degré de perfection. » Cet élément simple est une série dont la composition a quelque ressemblance avec celle des fonctions θ. Soient n un entier positif et q la constante $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, l'élément simple est la fonction de deux variables indépendantes z et u, définie par la série

$$\chi_n(z, u) = \frac{\pi}{\omega} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{2n\nu\pi u i}{\omega}} q^{n\nu(\nu-1)} \cot\frac{\pi}{\omega}(z - u - \nu\omega'),$$

qui devient infinie toutes les fois que la différence $z - u$ est de la forme $p\omega + p'\omega'$ (p et p' entiers). A l'aide de cet élément, on peut écrire toute fonction doublement périodique de troisième espèce, sous forme d'une somme de termes ne devenant chacun infini qu'en un point du parallélo-

(¹) *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*, Thèse par Ch. Biehler. Gauthier-Villars, 1879.

gramme des périodes et d'une partie entière, s'il y a lieu. Soit une fonction de troisième espèce $F(z)$ ramenée, ce qui est toujours possible, à vérifier deux relations de la forme

$$F(z+\omega)=F(z), \qquad F(z+\omega')=e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}F(z),$$

où m désigne un entier non nul, positif ou négatif.

Si m est positif, la fonction $F(z)$ a dans un parallélogramme des périodes m zéros de plus que d'infinis : en particulier, elle peut n'avoir que m zéros et pas d'infini. Toute fonction de cette espèce, ayant m zéros et pas d'infini, est une fonction linéaire et homogène de m fonctions

$$g_0(z), \quad g_1(z), \quad \ldots, \quad g_{m-1}(z),$$

linéairement indépendantes. Si la fonction $F(z)$ devient infinie du premier ordre en p points $a, b, \ldots, l$, avec les résidus correspondants A, B, ..., L, on peut l'écrire sous la forme suivante

$$F(z)=-A\chi_m(a,z)-B\chi_m(b,z)-\ldots-L\chi_m(l,z)+G(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction entière vérifiant les mêmes relations que $F(z)$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$G(z)=\lambda_0 g_0(z)+\lambda_1 g_1(z)+\ldots+\lambda_{m-1}g_{m-1}(z),$$

où les λ sont des constantes. Les résidus A, B, ..., L sont entièrement indépendants des pôles; quant aux coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, on arrive à les calculer (74), soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit par la considération de l'intégrale

$$\int F(x)\,\chi_m(x,z)\,dx,$$

prise sur le contour d'un parallélogramme élémentaire.

Si, au contraire, l'entier appelé m est négatif, $m=-\mu$, la fonction admet, dans un parallélogramme des périodes, μ infinis de plus que de zéros : supposons encore qu'elle devienne infinie du premier ordre aux points $a, b, \ldots, l$ avec les résidus A, B, ..., L, on aura

$$F(z)=A\chi_\mu(z,a)+B\chi_\mu(z,b)+\ldots+L\chi_\mu(z,l);$$

les résidus A, B, ..., L ne sont plus indépendants des pôles : ils sont liés aux pôles par μ relations

$$Ag_k(a)+Bg_k(b)+\ldots+Lg_k(l)=0, \qquad (k=0,1,2,\ldots,\mu-1).$$

Ces μ relations sont d'ailleurs suffisantes pour rendre le second membre de la dernière formule de décomposition doublement périodique de troisième degré : c'est ce que l'on vérifie, en cherchant l'effet de l'addition de la seconde période ω' au premier argument de $\chi_n(z, u)$.

Ainsi, et c'est là une circonstance très remarquable, la même fonction $\chi_n(z, u)$ sert d'élément de décomposition dans les deux cas : dans l'un des cas, z est la variable et u un paramètre qui coïncide successivement avec les différents pôles; dans l'autre, c'est le premier argument z qui sert de paramètre et le second u de variable.

Ces résultats donnent immédiatement les développements des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en séries trigonométriques (72). En effet, pour développer une quelconque de ces fonctions en série, il suffira de connaître le développement de l'élément simple. J'indique, en conséquence, des développements en séries des quatre fonctions

$$\chi_n(z, u), \quad \chi_n\left(z+\frac{\omega'}{2}, u\right), \quad \chi_n\left(z, u+\frac{\omega'}{2}\right), \quad \chi_n\left(z+\frac{\omega'}{2}, u+\frac{\omega'}{2}\right).$$

On se trouve alors en possession de méthodes et de formules générales permettant de trouver facilement les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et comprenant, comme cas particuliers, les formules, si précieuses pour l'Arithmétique, que M. Biehler a établies dans son excellente Thèse, en suivant la voie ouverte par M. Hermite. Quelques-unes des séries que j'ai obtenues de cette façon ont été reproduites par M. Hermite dans un Mémoire inséré au Tome C du *Journal de Crelle*. Cette méthode de développements en série permet de démontrer une loi générale énoncée par M. Hermite et vérifiée par M. Biehler sur un grand nombre d'exemples, loi qui donne une propriété arithmétique extrêmement remarquable des coefficients des développements en série, des fonctions de troisième espèce, suivant les puissances de q :

Si l'on développe une fonction doublement périodique de troisième espèce en une série ordonnée par rapport aux puissances de q, on voit apparaître dans les sinus et cosinus qui forment le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$ les combinaisons $\frac{\delta' \pm m\delta}{2}$ des diviseurs conjugués δ et δ' de N; le signe + convenant au cas où il y a au numérateur m fonctions Θ de plus qu'au dénominateur, le signe −, au cas où il y a au dénominateur m fonctions Θ de plus qu'au numérateur.

L'élément simple $\chi_n(a, z)$, considéré comme une fonction du second argument, vérifie une équation différentielle linéaire avec second membre dont les coefficients sont composés avec des fonctions Θ et leurs dérivées, et dont l'intégrale générale s'exprime à l'aide de fonctions Θ et de la fonction $\chi_n(a, z)$. On a donc ainsi (75) une suite d'équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction $\chi_n(a, z)$, avec un paramètre arbitraire a. Par exemple, en supposant $n = 1$, on trouve que $\chi_1(a, z)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre ayant pour intégrale générale

$$\chi_1(a, z) + \lambda e^{\frac{\pi z i}{\omega}} \mathrm{H}_1(z),$$

λ étant une constante arbitraire.

FONCTIONS ET INTÉGRALES ABÉLIENNES.

En 1885, le Journal *Acta mathematica*, publié à Stockholm par M. Mittag-Leffler, annonçait, dans les termes suivants, l'ouverture d'un concours entre les mathématiciens de tous les pays :

« Sa Majesté Oscar II, désireux de donner une nouvelle preuve de l'in-
» térêt qu'Elle porte à l'avancement des Sciences mathématiques, intérêt
» qu'Elle a déjà témoigné en encourageant la publication du Journal : *Acta*
» *mathematica*, qui se trouve sous Son auguste protection, a résolu de dé-
» cerner, le 21 janvier 1889, soixantième anniversaire de Sa naissance, un
» prix à une découverte importante dans le domaine de l'Analyse mathé-
» matique supérieure...

» Sa Majesté a daigné confier le soin de réaliser Ses intentions à une
» Commission de trois membres : M. Carl Weierstrass à Berlin, M. Charles
» Hermite à Paris, M. Gösta Mittag-Leffler à Stockholm.... »

J'envoyai à ce concours un Mémoire *Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs et les développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques* (60). — Mon ami et collègue M. Poincaré obtint le prix et mon Mémoire me valut une médaille d'or (¹); ce furent les seules récompenses décernées. Pour rendre compte de mon travail, je ferai de nombreux emprunts au Rapport de la Commission que je ne puis reproduire en entier. Voici d'abord le début du Rapport, faisant, bien mieux que je ne pourrais le faire, l'historique de la question :

« Les expressions des fonctions elliptiques par des séries simples de sinus

(¹) Dans une Lettre adressée à M. le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences et publiée dans les *Comptes rendus* du 25 février 1889, M. Mittag-Leffler s'exprime comme il suit, au sujet de mon travail : « Une seconde récompense, consistant en une médaille d'or avec l'inscription *In sui memoriam*, a été accordée par le Roi au Mémoire de M. Appell.... Ce beau et savant travail est l'œuvre d'un géomètre de premier ordre, et fera pareillement grand honneur à la Science française.... »

» et de cosinus, telles que les donne la formule de Fourier, ont, à bien des » points de vue, une grande importance en Analyse. Elles ont été employées » avec succès et jouent un rôle important dans beaucoup d'applications du » calcul à la Physique et à l'Astronomie. Elles ont conduit Jacobi aux for- » mules si remarquables du § 50 des *Fundamenta*, où le grand géomètre, » allant au delà des propositions connues de l'Arithmétique, obtient le » nombre de décompositions d'un entier quelconque en 2, 4, 6 et 8 carrés, » exprimé au moyen des diviseurs de ce nombre. D'autres résultats, d'une » nature plus cachée, sur le nombre des classes de formes quadratiques de » déterminants négatifs, devaient encore découler de la même source ana- » lytique et mettre dans tout son jour l'étroite correspondance des iden- » tités de la théorie des fonctions elliptiques avec la théorie des nombres. » Nous les rappelons succinctement pour faire comprendre quelles espé- » rances on avait dû concevoir de la découverte mémorable de Göpel et » Rosenhain, lorsqu'on eut, sous une forme entièrement semblable à celle » des fonctions elliptiques, les fonctions quadruplement périodiques de deux » variables inverses des intégrales hyperelliptiques de première classe. » Assurément il était possible de joindre aux expressions de ces nouvelles » transcendantes, par des quotients de fonctions Θ, des développements en » séries simples de sinus et de cosinus; mais la détermination effective des » coefficients présente les plus grandes difficultés et n'a pu jusqu'à présent » être abordée. Elle est le principal objet du Mémoire dont nous allons ana- » lyser les méthodes et les résultats.

» I. La solution donnée par Jacobi du problème de la rotation d'un corps » solide, autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices, » a été l'origine d'une notion analytique importante. Les expressions de l'il- » lustre auteur présentent, en effet, dans le cas le plus simple, l'exemple de » fonctions qui se reproduisent multipliées par des constantes lorsqu'on aug- » mente la variable de l'une ou l'autre des périodes. On a reconnu qu'elles » constituent un nouveau genre de fonctions, plus générales que les fonc- » tions doublement périodiques, dont le rôle comme élément analytique » propre se montre dans beaucoup de questions importantes. Elles s'offrent » en particulier dans la rotation d'un corps grave de révolution suspendu par » un point de son axe, dans la recherche de la figure de l'élastique gauche, » dans le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini, lorsqu'il » n'y a pas de forces accélératrices, etc.... Enfin elles donnent une mé- » thode régulière, d'une application facile, pour effectuer l'intégration des » équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, à coefficients dou-

» blement périodiques, dans tous les cas où la solution est une fonction uni-
» forme. Sous un autre point de vue, ces transcendantes peuvent encore
» être considérées comme provenant de l'intégrale elliptique la plus géné-
» rale qui aura été mise en exponentielle, en y remplaçant la variable par
» un sinus d'amplitude. On peut aussi ne pas faire ce changement et con-
» server l'intégrale qui, suivant le contour décrit par la variable, est sus-
» ceptible d'une infinité de déterminations. Ces valeurs multiples s'obte-
» nant par l'addition de constantes, les expressions dont nous parlons
» auront la propriété de se reproduire, multipliées par des facteurs con-
» stants, lorsqu'on fait décrire certains chemins à la variable. Qu'au lieu de
» considérer la variable sur un plan unique on recoure à la conception de
» Riemann, de manière à remplacer par une fonction à sens unique affectée
» de coupures une expression à déterminations multiples, on parvient à
» une quantité dont les valeurs, lorsqu'on passe d'un bord à l'autre de la
» coupure, se reproduisent multipliées par une constante. Nous nous trou-
» vons ainsi amenés à l'idée fondamentale de l'auteur, à la notion analy-
» tique des nouvelles transcendantes, auxquelles il donne la dénomination
» de *fonctions à multiplicateurs* et dont il établit les propriétés. »

Voici maintenant le résumé des principaux résultats que j'ai obtenus. Je pars de la considération d'une relation algébrique de genre p et de la surface de Riemann correspondante, rendue simplement connexe au moyen des coupures introduites par Riemann. Les *fonctions à multiplicateurs* sont alors des fonctions uniformes sur cette surface, n'ayant d'autres singularités que des pôles et dont les valeurs, aux deux bords d'une coupure, ne diffèrent l'une de l'autre que par des *facteurs ou multiplicateurs constants:* il y a en tout $2p$ multiplicateurs correspondant aux $2p$ périodes d'une intégrale abélienne de première espèce. Le problème qui se pose alors est de *former l'expression générale des fonctions qui admettent* $2p$ *multiplicateurs donnés d'avance*. J'indique cette expression sous deux formes différentes : sous la première forme, qui met en évidence les zéros et les infinis, la fonction est représentée par une exponentielle dont l'exposant est une somme d'intégrales abéliennes de première espèce avec des coefficients arbitraires et d'intégrales normales de troisième espèce avec des coefficients entiers; sous la deuxième forme, qui met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, elles est donnée par une somme d'éléments simples. J'avais déjà rencontré antérieurement ces fonctions à propos de l'intégration de certaines équations différentielles (23), et je les avais étudiées pour elles-mêmes (62)

dans un Mémoire étendu; dans ce Mémoire, j'avais indiqué la première forme de l'expression générale de ces fonctions et j'avais également donné une formule de décomposition en éléments simples; mais cette formule présentait cet inconvénient que l'élément simple devenait infini, non pas en un seul, mais en p points; pour arriver à une formule plus parfaite, j'ai dû avoir recours à la notion d'*intégrales de fonctions à multiplicateurs*, de même que, pour décomposer en éléments simples une fonction algébrique par la formule de *Riemann-Roch*, on est obligé de se servir d'*intégrales de fonctions algébriques*. Je démontre ensuite plusieurs théorèmes, parmi lesquels je cite le suivant qui est une généralisation de la proposition célèbre d'Abel, sur les intégrales de différentielles algébriques : *La somme des valeurs que prend une intégrale abélienne de première espèce aux zéros d'une fonction à multiplicateurs est égale à la somme des valeurs qui correspondent aux infinis de la même fonction, augmentée d'une constante dépendant uniquement des multiplicateurs.* Ce théorème conduit à des conséquences importantes sur le nombre des constantes arbitraires qui figurent dans l'expression d'une fonction ayant des multiplicateurs et des pôles donnés. Je prouve après cela que, comme il arrive déjà pour les fonctions algébriques de genre supérieur à zéro, les résidus et les pôles d'une fonction à multiplicateurs ne sont pas indépendants les uns des autres : il existe en général $(p-1)$ relations, entre les pôles et les résidus correspondants d'une fonction à multiplicateurs, et p dans un cas spécial, comprenant en particulier celui des fonctions algébriques; ce cas spécial intéressant se présente lorsqu'il existe une fonction sans zéros ni infinis, admettant les multiplicateurs donnés. C'est ainsi, par exemple, que, pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce d'une variable u, $(p=1)$, il n'y a en général aucune relation entre les pôles et les résidus, tandis qu'il en existe *une* lorsque les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme e^{au}, où a désigne une constante. Je me suis écarté un instant du Rapport pour pouvoir citer les résultats que j'avais obtenus antérieurement au concours et que la Commission ne pouvait pas attribuer à l'auteur anonyme du Mémoire qu'elle avait à juger. Pour continuer cette analyse, je ne puis mieux faire que de citer de nouveau le Rapport :

« III. Les intégrales de fonctions à multiplicateurs font ensuite le sujet
» d'une étude approfondie. L'Auteur obtient, à leur égard, un ensemble
» de propositions qui correspondent exactement aux théorèmes célèbres de
» Riemann sur les intégrales abéliennes. Nous indiquerons, comme exemple,

» leur classification en intégrales de première espèce qui sont toujours finies,
» en intégrales de seconde espèce n'ayant que des pôles, et en intégrales de
» troisième espèce où s'offrent des infinis logarithmiques. Nous citerons
» encore cette importante proposition qu'en général il existe $(p-1)$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes, et p dans le cas
» particulier dont il a été question précédemment. Les modules de périodicité de ces intégrales, le long des coupures, sont liés aux multiplicateurs
» par des relations qui deviennent identiques lorsque les multiplicateurs
» se réduisent à l'unité et que les intégrales deviennent abéliennes. Entre
» les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce à multiplicateurs inverses, existe une équation qui coïncide, dans le cas particulier des multiplicateurs égaux à l'unité, avec la relation d'une importance
» capitale découverte par Riemann, entre les modules de périodicité de
» deux intégrales abéliennes de première espèce. Enfin l'auteur forme les
» intégrales normales de fonctions à multiplicateurs de seconde et de troisième espèce; il établit des relations entre les modules de périodicité de
» ces intégrales et leurs multiplicateurs, puis d'autres entre ces modules
» et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses.
» L'ensemble de ces résultats rend manifeste l'analogie de la nouvelle
» théorie avec celle des intégrales abéliennes : la différence de nature analytique entre les deux genres de quantités apparaît toutefois dans cette
» circonstance, qu'il existe une intégrale de troisième espèce, avec un seul
» infini logarithmique, tandis qu'une intégrale abélienne de troisième espèce
» possède au moins deux infinis de cette nature. En dernier lieu, nous signalerons, dans la théorie des intégrales de seconde espèce, ce théorème
» d'un grand intérêt, que toute fonction à multiplicateurs s'exprime par une
» somme d'intégrales de seconde espèce ayant les mêmes multiplicateurs
» et devenant chacune infinie en un seul point. C'est, comme on le voit,
» la généralisation de la belle formule de Riemann-Roch, qui représente
» une fonction algébrique quelconque par une somme d'intégrales abéliennes de seconde espèce.

» IV. Nous venons d'indiquer rapidement les points les plus essentiels
» de la théorie des fonctions à multiplicateurs. Nous avons montré qu'elle
» a pour première origine les fonctions algébriques, leurs propriétés et celles
» de leurs intégrales telles que Riemann les a fait connaître; nous avons
» montré qu'elles constituent par l'ensemble de leurs caractères de nouveaux éléments analytiques où l'on retrouve, dans un sens beaucoup plus
» général, toutes les propriétés des fonctions doublement périodiques de

» seconde espèce. Il nous faut maintenant revenir à la question principale
» que l'auteur a eue en vue en entreprenant ces belles et profondes recher-
» ches où il a montré le plus remarquable talent d'invention. Son but était
» d'obtenir les intégrales définies qui représentent les coefficients des déve-
» loppements, par la formule de Fourier, des fonctions elliptiques et des
» fonctions abéliennes de deux variables à quatre paires de périodes simulta-
» nées. Un changement de variables le conduit d'abord à des fonctions à
» multiplicateurs, et, pour le cas des sinus d'amplitude qu'il traite en pre-
» mier lieu, ses principes généraux lui permettent d'obtenir les coefficients
» du développement avec autant de simplicité que d'élégance. En appli-
» quant ensuite la même méthode aux transcendantes de Gopel et de Rosen-
» hain, il trouve les coefficients sous la forme d'une fonction rationnelle des
» constantes p, q, r qui figurent dans les fonctions Θ à deux variables, mul-
» tipliée par une intégrale définie où entrent deux entiers indéterminés.
» C'est, pour la théorie des fonctions abéliennes, un résultat du plus haut
» intérêt : il donne la solution d'une question restée jusqu'ici inabordable,
» sous une forme qui permettra d'en poursuivre les conséquences ; il ouvre
» la voie pour l'étude approfondie des développements, par la formule de
» Fourier, des fonctions abéliennes et pour la formation des développements
» de ces fonctions procédant suivant les puissances de p, q, r. On peut donc
» attendre de voir ainsi se rétablir, autant que le comporte la nature des
» choses, l'analogie avec les fonctions elliptiques, dans ce point d'une impor-
» tance capitale où elles se lient aux propriétés des nombres. »

Je me permets de placer ici une observation, faisant ressortir la différence de nature analytique entre les développements des fonctions elliptiques par la formule de Fourier et ceux que j'ai trouvés pour les fonctions abéliennes. On sait que l'on ne peut pas faire l'inversion d'une intégrale ultra-elliptique de première espèce, comme l'on fait celle d'une intégrale elliptique ; mais on peut chercher à faire cette inversion, en restant dans le domaine des variables réelles et appliquant les idées que M. Weierstrass a développées dans un Mémoire *Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen* (¹) : ce nouveau problème, d'une grande importance au point de vue des applications, se ramène à celui que j'ai traité. Dans les dernières pages du Mémoire, je montre que la méthode suivie s'applique aussi aux développements, en séries trigonométriques, des fonctions hyperelliptiques de genre quel-

(¹) *Monastbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1866. p. 97.

conque et même de certaines fonctions irrationnelles, et que le mode de raisonnement, employé pour l'étude des intégrales de fonctions à multiplicateurs, peut également donner des résultats intéressants pour l'étude de l'intégrale générale d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Voici enfin la conclusion du Rapport :

« Nous pensons, en résumé, que le travail dont nous venons de faire l'ex-
» posé est l'œuvre d'un géomètre de premier ordre, et qu'il sera placé au
» nombre des plus importantes productions mathématiques qui aient appelé
» dans ces dernières années l'attention des analystes. »

Les fonctions à multiplicateurs constituent, comme le montre l'analyse précédente, des fonctions analogues aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Je me suis proposé d'étudier de même (71) certaines fonctions d'un point analytique, qui peuvent être envisagées comme analogues aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Si l'on considère une courbe algébrique de genre p et si l'on appelle $u^{(i)}(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ les p intégrales abéliennes normales de première espèce correspondantes, les fonctions considérées sont des fonctions du point analytique (x, y) qui ne changent pas, quand ce point décrit un cycle normal de *rang impair*, et qui se reproduisent multipliées par

$$e^{-mu^{(i)}(x,y)}$$

quand le point (x, y) décrit le cycle normal de rang $2i$, m désignant un entier positif ou négatif. Supposons encore que ces fonctions n'aient que des pôles sur la surface de Riemann; alors : 1° si m est positif, elles ont sur cette surface un nombre de zéros dépassant de mp celui des infinis; 2° si au contraire m est négatif et égal à $-\mu$, elles ont μp infinis de plus que de zéros. Les fonctions de la première sorte sont les inverses de celles de la seconde. Je donne l'expression générale de ces fonctions par une fraction rationnelle en x et y, multipliée par des fonctions Θ où l'on a remplacé les variables par les intégrales abéliennes correspondantes. Quand m est positif, les résidus et les pôles sont indépendants les uns des autres; quand m est négatif, il y a des relations nécessaires entre les pôles et les résidus correspondants.

Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables. — MM. Picard et Poincaré se sont occupés de la réduction des intégrales abéliennes à des intégrales elliptiques et, d'une manière générale, de la réduction des intégrales abéliennes d'un genre p à

celles d'un genre moindre. Lorsque cette réduction a lieu, des circonstances particulières se présentent pour les fonctions Θ correspondantes. Je me suis occupé d'abord (29) des intégrales abéliennes du premier genre et des fonctions Θ correspondantes, et j'ai indiqué une formule de réduction de la fonction $\Theta(x, y)$ à des fonctions Θ d'une seule variable; puis, passant au cas général (80), j'ai obtenu d'une façon analogue des formules de réduction pour les fonctions Θ de plusieurs variables.

Extension d'un théorème de Liouville aux fonctions abéliennes. — Liouville a démontré le théorème suivant sur les fonctions doublement périodiques :

Si l'on considère les zéros et les infinis d'une fonction elliptique qui sont situés dans un même parallélogramme élémentaire, la somme des zéros ne diffère de celle des infinis que par des multiples des périodes.

Comme ce théorème se rattache au théorème d'Abel, on est conduit à penser que l'on peut déduire, du théorème d'Abel, une proposition sur les fonctions abéliennes analogue à celle de Liouville sur les fonctions elliptiques. C'est ce que j'ai réussi à faire (33) pour le système des fonctions abéliennes qui expriment les sommes des puissances semblables des limites supérieures des intégrales abéliennes, dans les équations d'inversion de Jacobi.

Sur les fonctions abéliennes (48). — Dans une Lettre à M. Hermite [1], Jacobi démontre que les fonctions de deux variables à quatre paires de périodes qui résultent de l'inversion des intégrales ultra-elliptiques sont des *fonctions algébriques de fonctions d'une variable*. Depuis il n'a été fait, à ma connaissance, aucune recherche sur le mécanisme par lequel se manifeste, dans ce mode d'expression, la quadruple périodicité des fonctions ultra-elliptiques. D'après M. Weierstrass, toute fonction méromorphe de deux variables x et y, à quatre paires de périodes, peut s'exprimer rationnellement à l'aide de trois fonctions de même nature, liées par une équation algébrique irréductible. Ces fonctions sont des fonctions rationnelles de six quantités X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 dont les trois premières dépendent de x seul et sont liées par une relation algébrique, les trois dernières de y seul et sont liées par la même relation; ces fonctions rationnelles ne changent pas quand on fait sur X_1, X_2, X_3 une certaine substitution rationnelle et qu'on opère de même sur Y_1, Y_2, Y_3. On est ainsi conduit à envisager les fonc-

[1] *Journal de Mathématiques*, t. VIII.

tions abéliennes à un point de vue algébrique sur lequel je me propose de revenir plus tard.

Sur l'inversion des intégrales abéliennes. — Dans leur *Theorie der Abelschen Functionen*, MM. Clebsch et Gordan généralisent le problème de l'inversion, en intégrant un système d'équations aux dérivées partielles dans les premiers membres desquelles entrent les intégrales abéliennes de première espèce et des intégrales normales de troisième espèce; ils indiquent une méthode pour passer, par continuité, de ce cas, à celui où certaines intégrales de troisième espèce sont remplacées par des intégrales de seconde espèce. Des exemples de l'intégration d'un tel système avaient été donnés auparavant par Rosenhain (¹), puis par Clebsch, à l'occasion de ses recherches sur les courbes des genres o et 1. Enfin M. Elliot (²) a intégré un système d'équations où figurent les intégrales de première espèce, avec des intégrales *normales* de deuxième et troisième espèce. Il restait donc à envisager des systèmes d'équations contenant, en outre, les dérivées d'ordre quelconque des intégrales de deuxième espèce par rapport au paramètre. L'étude de ces systèmes m'a conduit au théorème général suivant (44) :

Soient x et y deux variables liées par une relation algébrique et $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; il existe toujours un certain nombre $(n-1)$ d'autres fonctions rationnelles de x et y

$$\varphi_2(x,y),\quad \varphi_3(x,y),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x,y)$$

possédant la propriété suivante : le système d'équations différentielles

$$\varphi_i(x_1,y_1)\,dx_1+\varphi_i(x_2,y_2)\,dx_2+\ldots+\varphi_i(x_n,y_n)\,dx_n=du_i\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

définit les n points analytiques

$$(x_1,y_1),\quad (x_2,y_2),\quad \ldots,\quad (x_n,y_n)$$

en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de telle façon que toute fonction rationnelle symétrique de ces n points soit uniforme en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

J'étudie spécialement les cas où le genre de la relation qui lie x et y est o ou 1; la méthode d'intégration employée dans le cas général, où le genre est quelconque, est une généralisation de la méthode de Clebsch; elle est

(¹) *Savants étrangers*, 1851.
(²) *Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. XI.

différente de celle de M. Elliot. Il serait trop long de reproduire ici les théorèmes particuliers que j'obtiens (64) pour les fonctions rationnelles et les fonctions elliptiques, et qui sont intéressants comme pouvant faire pénétrer la notion du problème d'inversion de Jacobi dans un enseignement élémentaire.

Sur des expressions triplement ou quadruplement périodiques. — Les fonctions abéliennes de genre *deux* sont des fonctions de deux variables, avec quatre paires de périodes simultanées, n'admettant pas de singularité essentielle à distance finie ; elles se réduisent, dans des cas limites, à des fonctions de deux variables à trois paires de périodes, dont le premier exemple a été donné par Rosenhain dans son Mémoire couronné. La question qui se présente naturellement à l'esprit est d'étudier les expressions les plus simples triplement ou quadruplement périodiques, avec des singularités essentielles à distance finie.

Un premier procédé pour former de ces expressions est le suivant (15) : Soient b et β deux constantes données, m un entier quelconque, $a_1, a_2, \ldots a_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ des constantes assujetties à la condition

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = m\beta;$$

et soit, d'autre part,

$$\varphi(x) = \frac{\theta_1(x + a_1)\,\theta_1(x + a_2)\ldots\theta_1(x + a_n)}{\theta_1(x + \alpha_1)\,\theta_1(x + \alpha_2)\ldots\theta_1(x + \alpha_n)}$$

la fonction θ_1 étant formée avec les périodes ω et ω'. Si l'on désigne par $f(y)$ une fonction de y admettant la période b, la fonction

$$\psi(x, y) = f\left[my + \frac{b}{2\pi i}\log\varphi(x)\right]$$

est une fonction uniforme de x et y admettant trois paires de périodes conjuguées, à savoir pour x les périodes ω, ω', o et pour y les périodes correspondantes o, $\frac{b\beta}{\omega}$, b. Dans le cas particulier où $f(y)$ est une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi y i}{b}}$, la fonction $\psi(x, y)$ est de la nature de celles qui ont été considérées par Rosenhain; entre trois de ces fonctions il existe une relation algébrique; il en existe une, en particulier, entre ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, car les dérivées partielles de ψ sont alors des fonctions de même nature que ψ. On peut par un procédé analogue former des expressions à quatre paires de périodes.

Une autre façon de former des expressions quadruplement périodiques consiste à se servir de séries infinies et à imiter ce que l'on fait pour les fonctions elliptiques, quand on représente ces fonctions par des séries de termes simplement périodiques. C'est ce que j'avais réussi à faire en me proposant de publier une étude complète sur ce sujet, quand une Note de M. Picard (*Comptes rendus*, 18 mars 1889) sur cette même question m'obligea à publier, dans la séance suivante (*Comptes rendus*, 25 mars 1889), les principaux résultats que j'avais obtenus (53), et que je vais rapidement résumer. Considérant une série dont le terme général est

$$S_{m,n} = a^{-m} b^{-n} \, R(e^{x+m\alpha+n\beta}, e^{y+m\gamma+n\delta})$$

$R(z, t)$ désignant une fonction rationnelle de z et t, a, b, α, β, γ, δ des constantes, et m et n des entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$, je remarque que, si cette série est convergente, elle définit une expression uniforme en x et y admettant les paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par le facteur a ou le facteur b quand on augmente x et y de la paire de périodes (α, γ) ou (β, δ). On obtient, de cette façon, des séries analogues à celles que M. Hermite prend comme point de départ de la théorie des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce [1]. En supposant les constantes a et b égales à l'unité, la série définit une expression quadruplement périodique. On peut se proposer de former, de la même façon, des expressions quadruplement périodiques de troisième espèce, c'est-à-dire des expressions se reproduisant multipliées par une exponentielle, dont l'exposant est une fonction linéaire de x et y, quand on augmente ces variables d'une paire de périodes. Je montre que, dans l'hypothèse $\beta = \gamma$, on obtient des expressions de cette nature en multipliant le terme général $S_{m,n}$ de la série employée précédemment par le terme général d'une série Θ de deux variables x et y construite avec les groupes de périodes (α, β) et (β, δ). D'une façon générale, l'étude des fonctions uniformes quadruplement périodiques de troisième espèce présente des particularités intéressantes; ces fonctions sont caractérisées par un certain nombre entier : si ce nombre entier est nul, on peut, par une substitution linéaire effectuée sur les variables x et y, ramener leurs paires de périodes à être $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (α, β), (β, δ), comme dans les fonctions Θ.

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885.

INTÉGRALES EULÉRIENNES. SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES. — POLYNOMES.

Intégrales eulériennes et séries hypergéométriques d'une variable. — La fonction hypergéométrique d'une variable définie par la série

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

a été étudiée, depuis Gauss, par un grand nombre de géomètres; elle comprend, comme cas particuliers, la plupart des fonctions élémentaires, et les relations auxquelles elle satisfait fournissent, comme l'a montré Gauss, une méthode générale pour le développement de ces fonctions en fractions continues algébriques; cette fonction hypergéométrique joue un rôle important dans beaucoup de questions de Mathématiques pures et appliquées, notamment dans la théorie des fonctions sphériques et dans plusieurs développements en séries employés en Mécanique céleste; elle vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre qui peut lui servir de définition, et c'est en se plaçant à ce point de vue que Riemann a étudié la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dans un Mémoire qui contient les germes de la théorie des équations différentielles linéaires, telle qu'elle a été développée depuis par M. Fuchs; enfin, g et h désignant deux des quatre quantités 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞, cette fonction peut être représentée par des intégrales définies de la forme

$$\int_g^h u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du,$$

étudiées par Euler dans le cas $g = 0$, $h = 1$, et par Jacobi dans les autres cas; c'est en partant de ces intégrales que Jacobi a trouvé, par des transformations faciles, toutes les solutions de l'équation différentielle de la série hypergéométrique indiquées par Gauss et Kümmer.

La théorie de la série hypergéométrique de Gauss est dans un rapport

étroit avec celle des intégrales eulériennes qui ont été étudiées à tant de points de vue différents. J'ai obtenu une formule très générale comprenant, comme cas particuliers, un grand nombre d'intégrales définies, exprimables à l'aide de l'intégrale eulérienne Γ, entre autres les intégrales eulériennes de première espèce et les intégrales qui se présentent dans la théorie des polynômes de Legendre et de Jacobi. J'ai montré, en effet (8), que l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)\, \mathrm{F}(\alpha+n, \beta-n, \gamma, x)\, dx,$$

où n désigne une constante quelconque, s'exprime au moyen de la fonction Γ, du moment qu'elle est finie; si la constante n est *nulle*, cette intégrale s'exprime au moyen de la fonction eulérienne Γ et de sa dérivée. Parmi les applications de cette formule générale, je donne d'abord (12) la détermination des coefficients du développement de la fonction hypergéométrique $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss, en série de polynômes de Jacobi,

$$\mathrm{X}_m = \mathrm{F}(\alpha+\beta+m, -m, \gamma, x),$$

où m est un entier positif, polynômes représentés par une formule de Jacobi analogue à celle que O. Rodrigues a donnée pour les polynômes de Legendre; les coefficients de ce développement ont des valeurs fort simples. Puis, supposant m et m' quelconques (non entiers), je calcule (12) l'intégrale

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} \mathrm{X}_m \mathrm{X}_{m'}\, dx$$

qui, d'après Jacobi, est nulle lorsque m et m' sont des entiers différents; je montre que cette intégrale est encore nulle, quand m et m' sont deux racines *distinctes* d'une équation transcendante, dont le premier membre s'exprime à l'aide de la fonction Γ et dont le second membre est une constante arbitrairement choisie; lorsque l'on prend $m = m'$, l'intégrale est évidemment différente de zéro; je donne alors sa valeur. On peut déduire de là la détermination des coefficients A_m du développement d'une fonction en série de la forme $\Sigma \mathrm{A}_m \mathrm{X}_m$, la sommation étant étendue aux valeurs de m qui sont racines de l'équation transcendante citée plus haut; on sait que certains problèmes de Physique conduisent à des développements de ce genre. Peu de temps après leur publication, ces résultats ont été généralisés par M. Callandreau (*Comptes rendus*, 14 juillet 1879).

Fonctions hypergéométriques de deux variables. — Plusieurs géomètres, entre autres Clausen [1], M. Pochhammer [2], M. Thomae [3], M. Goursat [4] ont généralisé les résultats donnés par Gauss et Riemann dans la théorie de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, en formant des fonctions hypergéométriques d'*une variable* construites d'une façon analogue à celle de Gauss et vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur. Antérieurement à M. Pochhammer, M. Hermite avait indiqué une intégrale définie analogue à celle d'Euler, contenant *un paramètre variable* x et vérifiant une équation différentielle d'ordre supérieur qui comprend, comme cas particulier, celle de Gauss. Je me suis placé à un tout autre point de vue, et je me suis proposé de former des fonctions *de deux variables indépendantes* x et y, analogues à la fonction hypergéométrique de Gauss, en suivant le mode de généralisation qui conduit des fonctions θ d'une variable aux fonctions Θ de plusieurs variables. Cette question se posait tout naturellement; en effet, les polynômes de Legendre

$$\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$$

s'expriment à l'aide de la série de Gauss; or M. Hermite, ayant étudié les propriétés des polynômes à *deux variables*

$$\frac{\partial^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n},$$

a montré que ces polynômes sont entièrement analogues à ceux de Legendre; on pouvait donc penser qu'il existait des fonctions hypergéométriques de deux variables comprenant, comme cas particuliers, les polynômes de M. Hermite, de même que la fonction de Gauss comprend ceux de Legendre. Le savant allemand Heine, professeur à l'Université de Halle, auteur d'un grand nombre de travaux sur les fonctions hypergéométriques, les fonctions de Legendre et de Jacobi, les fonctions de Lamé, ... et d'un excellent Ouvrage sur les fonctions sphériques [5], s'était occupé sans succès de cette question. Voici comment il commence dans son Traité (IIe Volume, p. 357) l'exposition des résultats que je lui avais communiqués et au sujet

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 3.
(2) *Journal de Crelle*, t. 71.
(3) *Mathematische Annalen*, t. 2.
(4) *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. XII.
(5) *Handbuch des Kugelfunctionen* (2e édition). La seconde édition de cet Ouvrage a été présentée à l'Académie par M. Hermite, dans la séance du 24 juin 1878.

desquels il m'avait écrit plusieurs lettres pleines d'encouragements bienveillants :

« Euler et Pfaff se sont déjà occupés de séries hypergéométriques » d'ordre supérieur, c'est-à-dire de séries dans lesquelles, au lieu de deux » éléments α et β au numérateur et d'un élément γ au dénominateur comme » dans la série de Gauss, entrent un plus grand nombre d'éléments au nu- » mérateur et au dénominateur, de telle manière que la permutation des » éléments du numérateur ou de ceux du dénominateur n'altère pas la » valeur de la série. Ces séries servent à l'intégration d'équations différen- » tielles linéaires d'ordre supérieur, comme la série de Gauss sert à l'inté- » gration d'une équation du second ordre, et occupent ainsi une place dé- » terminée dans l'Analyse (*voir* un Mémoire de Thomae, *Math. Annalen*, » t. II). Elles s'imposent à l'attention par plusieurs propriétés intéres- » santes, parmi lesquelles je citerai celles que Clausen a données dans le » tome III du *Journal de Crelle*, ...

» ... Partant de ce fait que ma généralisation de la série de Gauss avec » un facteur q [1] comprend comme cas particulier les fonctions Θ d'une » variable, tandis que les Θ d'ordre supérieur contiennent plusieurs va- » riables, je cherchai une généralisation de la série de Gauss contenant » *deux variables* et conservant les propriétés essentielles de la série de » Gauss. C'est cette généralisation que M. Appell a trouvée ... ».

Voici maintenant l'analyse des principaux résultats que j'ai obtenus dans cette voie :

Je considère (16) quatre séries F_1, F_2, F_3, F_4 qui peuvent être regardées comme autant de généralisations différentes de la série de Gauss. On le reconnaîtra immédiatement en comparant les termes généraux de ces séries au terme général de la série de Gauss : par exemple, les deux séries que j'appelle $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ et $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ ont respectivement pour terme général

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)\gamma'(\gamma'+1)\ldots(\gamma'+n-1)}\,\frac{x^m}{1.2\ldots m}\,\frac{y^n}{1.2\ldots n},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)\gamma'(\gamma'+1)\ldots(\gamma'+n-1)}\,\frac{x^m}{1.2\ldots m}\,\frac{y^n}{1.2\ldots n},$$

[1] Cette généralisation de Heine consiste à remplacer, dans le terme général de la série de Gauss, un facteur tel que $(\alpha+k)$ par $\frac{1-q^{\alpha+k}}{1-q}$.

les entiers m et n variant de o à $+\infty$. Ces quatre séries sont convergentes pour des valeurs de x et y dont les modules sont suffisamment petits : ainsi la série F_2 est convergente quand la somme des modules de x et y est inférieure à l'unité, et la série F_4 quand la somme de leurs racines carrées est inférieure à l'unité. Les quatre séries définissent donc des fonctions holomorphes de x et y dans le voisinage des valeurs $x = 0$, $y = 0$; comme pour les fonctions de Gauss, les dérivées partielles de ces fonctions sont des fonctions de même nature. Il existe, pour nos fonctions de deux variables, un grand nombre de formules semblables à celles que donne Gauss : *Relationes inter functiones contiguas;* puis des formules permettant de transformer ces fonctions, de les ramener les unes aux autres dans certains cas particuliers. On peut représenter ces fonctions par des intégrales définies qui rappellent l'intégrale définie d'Euler servant à représenter la fonction de Gauss. Ainsi, en faisant

$$f(u, v) = u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1} (1 - u - v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1},$$

on trouve que la fonction F_3 est égale à un facteur constant multiplié par l'intégrale définie double

$$\int\int (1 - ux)^{-\beta} (1 - vy)^{-\beta'} f(u, v)\, du\, dv,$$

prise entre les limites $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $1 - u - v \geqq 0$. En partant de cette expression de la fonction F_3, j'étends à cette fonction certaines propriétés que Jacobi a démontrées pour la fonction F de Gauss et qui se rattachent au développement de $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ en fraction continue (17).

L'une des propriétés les plus importantes de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss est qu'elle vérifie une équation linéaire du second ordre : nous allons trouver pour nos fonctions de deux variables une propriété toute semblable. Les fonctions F_2, F_3, F_4 satisfont chacune à deux équations différentielles linéaires simultanées, aux dérivées partielles. Par exemple, la fonction F_2 satisfait aux deux équations différentielles

$$(x - x^2) r - xys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] p - \beta y q - \alpha\beta z = 0,$$
$$(y - y^2) t - xys + [\gamma' - (\alpha + \beta' + 1)y] q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0,$$

où p, q, r, s, t désignent, comme d'ordinaire, les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x et y. Les équations que vérifient F_3 et F_4 sont du même genre : elles rentrent toutes dans le type d'équa-

tions simultanées de la forme

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

où les a et les b sont des fonctions de x et y telles que $(1 - a_1 b_1)$ ne soit pas identiquement nul, et où la condition d'intégrabilité est remplie identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y, z, p, q, s. L'étude de ces équations différentielles s'imposait : elle révèle cette circonstance intéressante que les propriétés de l'intégrale générale présentent de nombreux points de ressemblance avec celles de l'intégrale générale d'une équation linéaire à une variable indépendante, telles qu'elles résultent des travaux de M. Fuchs (61). Ainsi, lorsqu'on connaît quatre fonctions linéairement indépendantes vérifiant les deux équations simultanées, l'intégrale générale de ces équations est égale à une combinaison linéaire de ces quatre fonctions avec des coefficients constants arbitraires. On peut aussi, comme pour les équations linéaires, montrer que, si les coefficients et la quantité $\frac{1}{1 - a_1 b_1}$ sont des fonctions développables en séries convergentes procédant suivant les puissances positives croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$, on pourra satisfaire à ces équations par une fonction z développable de la même façon, les valeurs de cette fonction et des trois dérivées p, q, s étant arbitraires pour $x = x_0, y = y_0$. Enfin, si l'on prend quatre intégrales linéairement indépendantes et si l'on suppose que les variables imaginaires x et y décrivent dans le plan, sur lequel elles sont représentées, des courbes fermées, la valeur finale de chacune de ces intégrales est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des valeurs initiales des quatre intégrales. En appliquant ces théorèmes aux équations simultanées que vérifient respectivement les fonctions F_2, F_3, F_4, on arrive à trouver l'intégrale générale de chacun de ces systèmes d'équations simultanées, exprimée à l'aide de quatre fonctions hypergéométriques particulières. On arrive, en outre, à prolonger chacune des fonctions F_2, F_3, F_4 à l'extérieur des régions où les séries définissant primitivement ces fonctions cessent d'être convergentes; ce qui permet d'établir des relations fort nombreuses du genre de celles que Gauss donne dans son Mémoire « *Determinatio seriei nostræ per æquationem differentialem* » et dont Kummer a fait plus tard une étude approfondie.

La fonction F_1 se comporte autrement que les trois autres : elle vérifie *trois* équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles du second ordre et non *deux* équations seulement. Je démontre, pour ce

système d'équations, des théorèmes analogues aux précédents, avec cette différence qu'un système fondamental d'intégrales est formé de trois fonctions au lieu de quatre. Ces équations admettent un grand nombre d'intégrales exprimables à l'aide de la fonction F_1, par des formules telles que

$$x^l(1-x)^m y^{l'}(1-y)^{m'}(x-y)^n \, F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

t et t' désignant des fonctions rationnelles et du premier degré de x et y. J'ai indiqué beaucoup de ces intégrales, et M. Goursat [1], en étudiant la question d'une manière systématique, en a trouvé jusqu'à *soixante*.

Pour achever le résumé des principales propriétés des fonctions hypergéométriques de deux variables, il nous reste à dire un mot des polynômes qui s'y rattachent. On peut exprimer, à l'aide de la fonction F_2, les polynômes que M. Hermite a indiqués comme généralisation des polynômes de Legendre et des polynômes $\cos(n \operatorname{arc} \cos x)$ (*Comptes rendus*, t. LX) et qui ont été étudiés par Didon (t. V, VI, VII des *Annales de l'École Normale*), et les polynômes que j'ai formés (61)

$$U_{m,n} = x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} \frac{\partial^{m+n}\left[x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}\right]}{\partial x^m \, \partial y^n},$$

analogues aux polynômes de Jacobi; ainsi

$$U_{m,n} = C F_2(-m-n, m+\gamma, n+\gamma', \gamma, \gamma', x, y),$$

C désignant une constante connue. Ces polynômes possèdent des propriétés semblables à celles des polynômes de M. Hermite et des fonctions Y_n de Laplace; la propriété fondamentale est que l'intégrale double

$$\iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} U_{\mu,\nu} \, dx \, dy,$$

étendue à l'aire du triangle limité par les trois droites $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$, est nulle, tant que $m + n$ est différent de $\mu + \nu$; cette intégrale, au contraire, n'est pas nulle quand $m + n = \mu + \nu$, et j'indique alors sa valeur. Ces formules permettent de calculer les coefficients du développement d'une fonction de deux variables x et y en série procédant suivant les polynômes $U_{m,n}$. Le calcul se simplifie par l'introduction d'un polynôme adjoint exprimable aussi à l'aide de la fonction F_2. Les mêmes propositions s'étendent à des polynômes définis d'une façon plus générale, en ajoutant, dans les polynômes $U_{m,n}$, le facteur $(1-x-y)^\lambda$ en avant du signe de diffé-

[1] *Comptes rendus*, 23 octobre 1882.

rentiation et le facteur inverse sous le signe de différentiation (103). Elles résultent toutes d'une propriété générale des fonctions satisfaisant à l'équation différentielle unique suivante, obtenue en ajoutant les deux équations différentielles de la fonction F_2,

$$\begin{aligned}&(x-x^2)r - 2xys + (y-y^2)t\\&+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x]p + [\gamma'-(\alpha+\delta+1)y]q - \alpha\delta z = 0,\end{aligned}$$

équation qui est intéressante à étudier pour elle-même et dont un grand nombre d'intégrales s'expriment à l'aide des fonctions F_2 et F_4. Cette propriété est la suivante : *Les quantités* γ, γ', $1+\alpha+\delta-\gamma-\gamma'$ *étant supposées positives, soient* z *une intégrale de l'équation, et* z_1 *une intégrale de l'équation obtenue en remplaçant* α *et* δ *par* $\alpha+\lambda$ *et* $\delta-\lambda$; *l'intégrale double*

$$\iint x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1\,dx\,dy,$$

étendue au triangle formé par les droites $x=0$, $y=0$, $1-x-y=0$, *est nulle, si les fonctions* z *et* z_1 *et leurs dérivées premières restent finies dans les limites d'intégration.* Il est intéressant de remarquer que ce théorème comprend, comme cas très particulier, le théorème fondamental relatif aux fonctions $Y_n(\theta,\varphi)$ de Laplace : en effet, l'équation différentielle bien connue, à laquelle satisfont les fonctions Y_n, se ramène à la forme générale précédente par la substitution $\sin\theta\cos\varphi=\sqrt{x}$, $\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{y}$; il comprend également, comme cas limite, certaines formules données par M. Hermite sur les polynômes qui naissent de la différentiation d'une exponentielle dont l'exposant est un polynôme homogène et du second degré en x et y.

Dans les recherches que nous venons d'exposer, les variables x et y sont regardées comme indépendantes. Si l'on suppose x et y exprimées en fonction d'une variable t, c'est-à-dire liées par une relation, les quatre fonctions hypergéométriques deviennent des fonctions d'une variable indépendante et vérifient, la première, F_1, une équation différentielle linéaire du troisième ordre, les trois autres, F_2, F_3, F_4, des équations différentielles linéaires du quatrième ordre (63). L'ordre de ces équations peut s'abaisser lorsqu'on établit certaines relations particulières entre x et y. Ainsi la fonction F_4 vérifie une équation du troisième ordre quand $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$; de même F_2 quand $x+y=1$. Ces théorèmes, qui peuvent s'étendre à des systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles simultanées, semblables à celles que vérifient nos fonctions, trouvent leur application dans une question

posée par M. Tisserand [1] au sujet d'un développement employé en Mécanique céleste [2].

Soit $P^{(N)}(p, z)$ *le polynôme de degré* N *en* z *qui forme le coefficient de* θ^N *dans le développement de* $(1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{1-p}{2}}$ *effectué suivant les puissances positives de* θ; *il s'agit de trouver une formule générale donnant le développement du polynôme* $P^{(N)}(p, z)$ *suivant les cosinus des multiples de* x *et* y, *quand on pose* $z = \mu \cos x + \nu \cos y$.

M. Tisserand détermine le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ de $4 \cos ix \cos jy$ pour les valeurs $p = 2$, $p = 3$; et de plus, il montre que, si p est de la forme $2q + 3$, q entier, le coefficient $B_{i,j}^{2n,p}$ s'exprime à l'aide d'un polynôme hypergéométrique du second ordre. En calculant directement le coefficient général $B_{i,j}^{N,p}$, j'ai fait voir (39) que, quels que soient le nombre p et les constantes μ et ν, ce coefficient s'exprime à l'aide d'une de mes fonctions hypergéométriques de deux variables par la formule

$$B_{i,j}^{N,p} = C \mu^i \nu^j F_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \frac{i+j-N}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$

le facteur C étant une constante dont je donne la valeur; le développement de la fonction F_4, qui figure dans cette expression, s'arrête de lui-même, car le second élément est un entier négatif. Dans la séance du 19 novembre 1883, M. Radau a communiqué à l'Académie une méthode permettant d'établir rapidement cette même formule. Mais, dans l'application à la Mécanique céleste, que M. Tisserand avait en vue, μ et ν ne sont pas indépendantes et l'on a

$$\mu = \cos^2 \frac{J}{2}, \qquad \nu = \sin^2 \frac{J}{2}, \qquad \mu + \nu = 1.$$

Il est donc important de rechercher quelles simplifications cette relation entre μ et ν apporte à l'expression du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$. Dans les cas signalés par M. Tisserand, cette relation permet de réduire le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ à un polynôme hypergéométrique d'une seule variable du premier ou du second ordre, et, dans ces cas, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ considéré comme fonction de J satisfait à une équation différentielle linéaire du deuxième ou du troisième

---

(1) *Comptes rendus*, 15 et 22 octobre 1883.

(2) *Voyez* aussi un Mémoire de M. Radau : *Sur le développement de l'expression* $1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-k}$ (*Annales de l'Observatoire, Mémoires*, t. XVIII, 1884).

ordre. M. Callandreau a montré (*Comptes rendus*, séance du 26 novembre 1883) que, dans le cas général, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, considéré comme fonction de J, vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre, qu'il n'a d'ailleurs pas formée complètement. Au moment où M. Callandreau a publié cette Note, j'étais de mon côté, en suivant les conseils de M. Tisserand, arrivé à ce même résultat. Je forme (63) cette équation et j'indique les cas dans lesquels elle se réduit au second ordre ou peut être ramenée à celle de la série hypergéométrique d'ordre supérieur $F(a, b, c, d, e, x)$.

Dans toutes mes recherches sur mes fonctions hypergéométriques de deux variables, je me suis principalement placé au même point de vue qu'Euler, Gauss, Jacobi, en m'efforçant de montrer que ces fonctions constituent bien l'extension de la fonction de Gauss. Les recherches que M. Picard a faites postérieurement, dans une autre direction, sont venues confirmer cette manière de voir. De même que Riemann définit la fonction hypergéométrique de Gauss par ses trois points critiques et les exposants correspondants, M. Picard [1] s'est proposé de définir d'une façon analogue certaines fonctions de deux variables indépendantes : il retrouve ainsi une de nos fonctions hypergéométriques de deux variables, la fonction F_1. M. Goursat a montré ensuite [2] que les séries F_2 et F_3 sont susceptibles d'une définition analogue.

---

[1] *Comptes rendus*, mai 1880; *Annales de l'École Normale*, octobre 1881.
[2] *Comptes rendus*, 13 et 27 novembre 1882.

FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Fonctions analogues aux fonctions circulaires. — Les fonctions circulaires se présentent comme formant la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le développement de $e^{x\sqrt{-1}}$; ce fait m'a conduit (4) à étudier les trois fonctions de deux variables θ et φ qui naissent du développement de l'exponentielle $e^{\alpha\theta+\alpha^2\varphi}$, où α et α^2 sont les racines cubiques de l'unité. Les propriétés de ces fonctions permettent de concevoir un calcul de quantités complexes dans l'espace, semblable au calcul des imaginaires dans le plan. A cette occasion, il se présente des systèmes de trois familles de surfaces, telles que les plans tangents en un point commun à trois surfaces, appartenant respectivement aux trois familles, forment un trièdre régulier dont les arêtes sont également inclinées sur la droite ayant pour équations $x = y = z$: incidemment, je détermine d'une manière simple les lignes asymptotiques de la surface $XYZ = T^3$.

Généralisant ce résultat, j'étudie n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $(n-1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, satisfaisant aux équations différentielles

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dx_1 + y_3 dx_2 + \ldots + y_n dx_{n-1},\\ dy_2 &= y_3 dx_1 + y_4 dx_2 + \ldots + y_1 dx_{n-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ dy_n &= y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \ldots + y_{n-1} dx_{n-1}, \end{aligned}$$

qui constituent l'extension naturelle des équations

$$dy_1 = y_2 dx, \qquad dy_2 = y_1 dx,$$

auxquelles satisfont les sinus et cosinus hyperboliques. Les fonctions ainsi obtenues admettent $(n-1)$ groupes de périodes conjuguées et sont liées par une relation algébrique.

Fonctions analogues aux fonctions eulériennes. — La fonction $\Gamma(x)$ ne diffère que par un facteur exponentiel de la limite du produit infini dont le terme

général est $\frac{n}{x+n}e^{\frac{x}{n}}$; elle est formée avec la moitié des facteurs primaires qui constituent la fonction $\sin\pi x$. En suivant le mode de généralisation employé pour passer des produits infinis qui définissent les fonctions circulaires aux produits infinis qui définissent les fonctions elliptiques, on est amené (13) à considérer des fonctions formées avec la moitié des facteurs primaires qui constituent la fonction Θ. Ces nouvelles fonctions peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction O que Heine a découverte, en généralisant la série hypergéométrique de Gauss. On a ainsi une double série de fonctions : d'un côté, les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques, et, de l'autre, les fonctions eulériennes et les fonctions de Heine. Mais, tandis qu'il n'existe pas de fonctions uniformes à plus de deux périodes, il existe des fonctions qui sont semblables à la fonction eulérienne Γ et à la fonction O de Heine, et qui sont formées à l'aide de plusieurs quantités imaginaires $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, comme la fonction O est formée avec deux quantités ω, ω_1. Je m'occupe (91) de l'étude des principales propriétés de ces fonctions, puis j'applique les plus simples d'entre elles à différents problèmes de calcul fonctionnel et à l'évaluation de la limite de certaines séries et produits infinis.

Soient $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, (n+1)$ quantités imaginaires, telles que les modules de

$$q_1 = e^{\frac{\pi\omega_1 i}{\omega}}, \quad q_2 = e^{\frac{\pi\omega_2 i}{\omega}}, \quad \ldots, \quad q_n = e^{\frac{\pi\omega_n i}{\omega}}$$

soient moindres que l'unité; la fonction que j'étudie est définie par l'équation

$$\mathrm{O}(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \prod \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \ldots q_n^{2m_n}\right),$$

le produit étant étendu à toutes les valeurs entières positives ou nulles de $m_1, m_2, \ldots, m_n$. J'indique $(n+1)$ équations aux différences finies auxquelles satisfait cette fonction O, des formules pour la multiplication de l'argument x et la décomposition de cette fonction O en facteurs primaires. Lorsque le nombre n est égal à l'unité, on retrouve les fonctions O de Heine. Le cas où $n = 2$ mérite une attention particulière (14) : en divisant la fonction $\mathrm{O}(-x + \omega_1 + \omega_2 \mid \omega, \omega_1, \omega_2)$ par la fonction $\mathrm{O}(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2)$, on obtient une fonction possédant les propriétés curieuses suivantes : elle a la période ω, et, quand on augmente la variable x de ω_1 ou ω_2, elle se reproduit multipliée par une fonction Θ aux périodes (ω, ω_2) ou aux périodes (ω, ω_1). On peut, à l'aide de cette nouvelle fonction, exprimer toute fonc-

tion uniforme qui admet la période ω et se reproduit multipliée par une fonction elliptique aux périodes ω et ω_2, quand on fait croître x de ω_1. Le cas particulier, où les périodes ω_1 et ω_2 sont égales, avait été considéré antérieurement par M. Picard [1]; j'indique, pour ce cas, une relation intéressante entre la fonction O et la dérivée d'une fonction Θ par rapport à une *période*.

Périodicité générale. — Une fonction d'une variable x est périodique, lorsqu'elle ne change pas de valeur, quand on fait l'opération qui consiste à ajouter une certaine constante à x; on peut se placer à un point de vue beaucoup plus général, en considérant des fonctions d'une variable x qui ne changent pas de valeur, quand on fait, sur x, une opération déterminée $\varphi(x)$, par exemple quand on élève x au carré, $[\varphi(x) = x^2]$. La fonction $\varphi(x)$ étant donnée, pour obtenir des fonctions possédant cette propriété, je forme des séries qui, lorsqu'elles sont convergentes, conservent la même somme quand on y remplace x par $\varphi(x)$; ces séries sont construites de telle façon que le changement de x en $\varphi(x)$ change chacun de leurs termes en un autre. J'indique (10), comme exemple, les cas où $\varphi(x)$ a l'une des deux valeurs x^2 ou $x^3 - 1$. Me proposant ensuite (11) de traiter un cas où $\varphi(x)$ est une fonction transcendante, j'ai supposé $\varphi(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$, et, pour simplifier le calcul, j'ai modifié la méthode générale. Ma méthode permet également de former une fonction de x, se reproduisant multipliée par un facteur $\psi(x)$ donné d'avance, quand x se trouve remplacé par $\varphi(x)$; il suffit, pour cela, de multiplier ou de diviser le terme général de mes séries par une espèce de factorielle. Ces nouvelles fonctions, qui constituent une sorte de généralisation des fonctions périodiques de seconde espèce, se présentent, comme je l'ai montré (27), dans l'intégration de certaines équations différentielles linéaires. A la suite des deux Notes que j'ai publiées sur ces fonctions, M. Rausenberger a fait une étude intéressante de la *périodicité générale* dans les *Mathematische Annalen*, de l'année 1881.

Sur les fonctions uniformes de deux points analytiques, qui sont laissées invariables par une infinité de transformations rationnelles. — Les fonctions fuchsiennes de M. Poincaré sont des fonctions d'une variable laissées invariables par une infinité de substitutions linéaires; M. Picard a étudié des

(1) *Comptes rendus*, 11 mars 1878.

fonctions de deux variables possédant cette même propriété. Je démontre qu'il ne peut pas exister de fonctions uniformes *d'un seul point analytique d'une courbe du premier genre* qui remplissent des conditions analogues. On se demande alors s'il ne serait pas possible de former des fonctions uniformes *de deux points analytiques* (x, y), (x', y'), appartenant à une courbe du premier genre, qui gardent la même valeur, quand on remplace les deux points (x, y), (x', y') par deux autres points (x_1, y_1), (x'_1, y'_1) déduits des premiers par une transformation rationnelle réversible; c'est-à-dire une transformation telle que, les deux points (x, y), (x', y') étant supposés connus, les coordonnées des deux autres points (x_1, y_1), (x'_1, y'_1) sont déterminées par des équations du second degré ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de (x, y), (x', y'), et réciproquement. Je forme (38) des fonctions de cette nature, en m'appuyant sur un problème d'inversion résolu par Rosenhain et sur les propriétés des fonctions abéliennes. La transformation rationnelle réversible, qui n'altère pas les nouvelles fonctions, est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps dans les problèmes de Mécanique. — On sait que les fonctions elliptiques donnent la solution complète du problème du pendule simple, en permettant d'exprimer le sinus et le cosinus de l'angle d'écart par des fonctions uniformes du temps, aisées à calculer numériquement. Ces fonctions admettent une période réelle T qui est la durée de l'oscillation et une période imaginaire de la forme $i\mathrm{T}'$ qui, au premier moment, ne paraît pas avoir de signification mécanique. Or cette période imaginaire s'interprète de la façon la plus simple (9) : si le pendule était placé dans la même position initiale et la pesanteur changée de sens, c'est-à-dire dirigée vers le haut, le pendule oscillerait sur l'arc supérieur de la circonférence qu'il décrit, et la durée de l'oscillation serait précisément T′. Cette interprétation résulte du théorème général suivant :

Étant donné un système de points matériels assujettis à des liaisons indépendantes du temps t et soumis à des forces qui ne dépendent que des positions des différents points, les intégrales des équations différentielles du mouvement de ce système restent réelles si l'on y remplace t par $t\sqrt{-1}$ *et les projections des vitesses initiales* $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ *par* $-\alpha_k\sqrt{-1}$, $-\beta_k\sqrt{-1}$, $-\gamma_k\sqrt{-1}$. *Les expressions ainsi obtenues sont les équations du nouveau mouvement que prendraient les mêmes points matériels si, placés dans les mêmes conditions initiales, ils étaient sollicités par des forces respectivement égales et opposées à celles qui produisaient le premier mouvement.*

Réduction à la forme canonique des équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible. — L'analogie de la théorie de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible avec celle du mouvement d'un point matériel a été signalée depuis longtemps, notamment par M. Bonnet. Partant de ce point, je me suis

proposé d'étendre, aux équations d'équilibre des fils, les beaux théorèmes de Jacobi sur les équations canoniques d'Hamilton. Je montre d'abord (36) comment on peut réduire à la forme canonique les équations d'équilibre d'un fil libre ou situé sur une surface, et appliquer, à ces équations, des théorèmes analogues à ceux de Jacobi; je démontre en particulier (76) le théorème suivant, qui donne la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible entièrement libre, dans l'hypothèse qu'il existe une fonction des forces $U(x, y, z)$:

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2=(U+h)^2,$$

qui définit Θ *comme fonction de* x, y, z, *et supposons que l'on ait trouvé une intégrale complète* $\Theta(x, y, z, \alpha, \beta, h)$ *de cette équation, avec les deux constantes arbitraires* α *et* β *distinctes de* h *et de la constante que l'on peut toujours ajouter à* Θ. *Les intégrales des équations d'équilibre sont alors les suivantes*

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\alpha', \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}=\beta', \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial h}=s+h',$$

α', β', h' *étant de nouvelles constantes et* s *désignant l'arc de la courbe d'équilibre compté positivement dans un sens convenable.*

Chaînette sphérique. — L'analogie entre les propriétés de l'équilibre des fils et celles du mouvement d'un point matériel se retrouve jusque dans certains faits très particuliers. C'est ainsi que la recherche de la figure d'équilibre d'une chaînette homogène pesante sur une sphère peut être effectuée par une méthode toute semblable à celle que M. Hermite a employée pour exprimer, en fonction uniforme du temps, les coordonnées d'un point pesant mobile sur une sphère (*Journal de Crelle*, t. 85). On trouve (83) que les coordonnées d'un point de la chaînette sphérique et l'arc de cette courbe peuvent être exprimés en fonction uniforme d'un paramètre, à l'aide des fonctions Θ et H de Jacobi; en faisant les calculs, on rencontre et l'on intègre une équation différentielle linéaire, analogue à celle de Lamé qui, comme l'a montré M. Hermite, se présente dans la théorie du pendule conique.

Mouvement d'un fil dans un plan fixe. — Parmi les systèmes matériels non rigides formés d'une infinité d'éléments, le plus simple est un fil ou une chaîne

mobile dans un plan fixe sous l'action de forces données. Si on laisse de côté le problème des cordes vibrantes et, en général, la théorie des oscillations infiniment petites, le problème du mouvement d'une chaîne dans un plan a été peu étudié. Les résultats les plus importants et les plus simples sur ce sujet sont dus à M. Resal (*Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 321 et suiv.). M. Resal forme deux équations simultanées aux dérivées partielles, de l'intégration desquelles dépend la solution du problème; puis il ajoute que l'élimination de la tension entre ces deux équations conduit à une équation aux dérivées partielles du *sixième ordre*. En employant un système de coordonnées tangentielles, j'arrive (47) à ramener la solution du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du *quatrième ordre* seulement. Voici une analyse rapide de la méthode suivie. A l'instant t la chaîne est disposée suivant une certaine courbe; appelons α l'angle que fait la tangente à cette courbe, en un point, avec l'axe Ox, et δ la distance de cette tangente à l'origine des coordonnées; cette distance δ sera une fonction des deux variables indépendantes α et t; je prends alors, pour fonction inconnue p, une fonction dont la dérivée partielle par rapport à α est δ. C'est cette fonction p des deux variables α et t qui vérifie une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre; une fois p connu, les expressions des coordonnées x et y d'un point de la courbe, de l'arc s et de la tension s'obtiennent très aisément.

A toute intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles correspond un mouvement possible du fil, à condition que la tension soit positive. Par exemple, en supposant que la force extérieure dépende uniquement de la position de l'élément du fil, on retrouve, pour les courbes planes, le résultat de M. Léauté ([1]) relatif à la figure de repos apparent d'une corde en mouvement dans l'espace. Il suffit, pour cela, de chercher à vérifier l'équation par une intégrale particulière de la forme $\varphi(\alpha)+\psi(t)$; on trouve ainsi que le glissement du fil est uniformément accéléré, et que la figure de repos apparent est la figure d'équilibre que prendrait le fil si la composante tangentielle de la force était augmentée d'une constante. M. Léauté, se plaçant au point de vue pratique, n'a considéré que le cas où le glissement est *uniforme*. Je résous le même problème, en supposant le fil hétérogène, puis je trouve (59) les mouvements qui peuvent être représentés par un glissement le long d'une courbe animée d'un mouvement de trans-

---

([1]) *Comptes rendus*, 10 novembre 1879; *Bulletin de la Société philomathique*, 18 novembre 1879.

lation ou de rotation, ou restant homothétique d'elle-même, etc.... Toutes ces questions sont traitées par un procédé uniforme et ramenées à un même problème d'Analyse. Enfin ma méthode se prête facilement à l'étude des oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable.

De l'homographie en Mécanique. — « La découverte des *principes de projection centrale* marque incontestablement une époque importante dans l'histoire de la Géométrie moderne. Les méthodes fondées sur ces principes possèdent un caractère à la fois intuitif et systématique, qui les rend également propres à découvrir de nouvelles propriétés des figures et à rattacher tout un ensemble de propositions à une même vérité générale (¹). » Il m'a paru intéressant de montrer que ces mêmes principes peuvent être appliqués, en Mécanique, au mouvement d'un ou de plusieurs points libres sollicités par des forces qui ne dépendent que des positions des points. On peut, par exemple, à l'aide de la transformation homographique, rattacher les unes aux autres des questions de Mécanique en apparence différentes, comme le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance et le mouvement d'un point attiré par un plan fixe en raison inverse du cube de la distance. Je vais expliquer la transformation pour le cas le plus simple possible, c'est-à-dire pour le mouvement d'un point matériel M, dans un plan fixe, sous l'action d'une force F *dépendant seulement de la position du mobile*. Si l'on fait, sur les coordonnées x et y du point M, une transformation homographique par les formules connues

$$x_1 = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \qquad y_1 = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''},$$

en remplaçant le temps t par une autre variable t_1 liée à t par la relation

$$k\,dt_1 = \frac{dt}{(a''x + b''y + c'')^2} \qquad (k \text{ constant}),$$

on trouve (52) que le point M_1 de coordonnées x_1 et y_1 se meut, dans le temps t_1, comme un point matériel sollicité par une force F_1 dépendant uniquement *de la position du mobile;* la trajectoire du second point M_1 est la *transformée homographique* de celle du premier M; la force F_1 se déduit de F d'une manière simple, sa direction est la *transformée homographique* de la direction de la force F. Il résulte de cette dernière propriété

(¹) MOUTARD, *Applications d'Analyse et de Géométrie de Poncelet*, t. I, p. 509.

que, si la force F est centrale ou parallèle à une direction fixe, la force F_1 passe aussi par un point fixe à distance finie ou infinie. Notre transformation comprend, comme cas particulier, deux transformations que M. Halphen a indiquées ([1]) pour conclure des lois de force bien connues (attraction proportionnelle à la distance ou inversement proportionnelle au carré de la distance), les lois de force signalées par MM. Darboux et Halphen, comme étant les plus générales qui font décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales. On doit se demander maintenant s'il existe, en Mécanique comme en Géométrie, des transformations plus générales que la transformation homographique, qui seraient obtenues en remplaçant les fonctions linéaires figurant dans les formules précédentes par d'autres fonctions des coordonnées x et y. On arrive (79), par un calcul un peu long, à cette conclusion intéressante : *si la nouvelle force* F_1 *doit dépendre uniquement de la position du mobile* M_1, *quelle que soit la force* F, *la seule transformation réalisant cette condition est la transformation homographique.* Ces considérations peuvent être étendues au mouvement d'un point dans l'espace et même au mouvement de plusieurs points, à condition de faire, dans ce dernier cas, une transformation homographique générale contenant à la fois les coordonnées de tous les points.

Potentiel. — L'étude que j'ai faite des fonctions vérifiant l'équation du potentiel m'a permis de résoudre quelques problèmes de Physique mathématique. J'ai d'abord (42) résolu (en commun avec M. Chervet) le problème de la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini, dans l'hypothèse que les électrodes d'une pile se trouvent en deux points du liquide et qu'un régime permanent soit établi. L'expression de ce potentiel s'obtient aisément, au moyen de l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions vérifiant l'équation différentielle du potentiel (57). J'ai reconnu ensuite que l'on peut appliquer la même méthode au cas où la masse liquide aurait la forme d'un parallélépipède rectangle, les électrodes se trouvant en des points quelconques de la masse. Ces résultats sont susceptibles d'une grande extension (58) et fournissent ainsi une application, à la *Physique mathématique*, des propositions que j'avais obtenues en poursuivant l'analogie entre les fonctions qui vérifient l'équation différentielle du potentiel et les fonctions

([1]) *Bulletin de la Société philomathique*, 7ᵉ série, t. I, p. 89.

d'une variable imaginaire. Ces applications comprennent, entre autres, la détermination de la fonetion de Green pour un parallélépipède rectangle d'après Riemann, le calcul des vitesses dans l'éeoulement d'un liquide par le fond d'un vase prismatique, tel que l'ont donné MM. Boussinesq, de Saint-Venant et Flamant. J'arrive à résoudre ces mêmes problèmes pour tous les volumes limités par un polyèdre possédant la propriété suivante : si l'on prend les symétriques du polyèdre par rapport à ehacune de ses faees, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chaeune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, les polyèdres en nombre infini ainsi obtenus ne *pénètrent pas les uns dans les autres*. Dans toutes ces applications, le seul élément analytique nouveau qu'il soit nécessaire d'introduire est la fonetion que j'ai appelée $Z(x, y, z)$, ou les fonctions plus simples auxquelles elle se réduit, quand un ou deux groupes de périodes deviennent infinis.

SÉRIES. — SUJETS DIVERS.

Séries. — Beaucoup de fonctions employées en Analyse sont définies par des séries ordonnées par rapport aux puissances positives de la variable x. Cette variable étant réelle et les coefficients de la série étant positifs à partir d'un certain rang, la série, convergente pour de petites valeurs de x, deviendra divergente quand x tendra, en croissant, vers une certaine limite qu'on peut toujours ramener à être l'unité, à moins que la série ne converge pour toutes les valeurs de la variable. La question qui se pose alors est de savoir de quelle façon la fonction définie par la série devient infinie pour $x = 1$. Je résous cette question (7), en supposant que le produit du coefficient de x^n par une certaine puissance de n tende vers une limite pour n infini : dans cette hypothèse, la fonction devient infinie comme une puissance négative de $(1 - x)$, ou comme $-\log(1 - x)$, dans un cas particulier. Ce théorème, qui peut être utile pour trouver la somme de la série dans le voisinage de la valeur critique 1, est un cas particulier d'une proposition que j'ai indiquée postérieurement (100) et qui donne la limite du rapport de deux séries divergentes pour lesquelles le rapport des termes généraux tend vers une limite.

Il existe deux classes étendues de séries et de produits convergents dont on peut évaluer les limites à l'aide de transcendantes connues (6). Ce sont : 1° les séries et les produits convergents dont le terme général est une fonction rationnelle du rang n; leurs limites s'expriment à l'aide de la fonction Γ et de ses dérivées; 2° les séries et les produits convergents dont le terme général, de rang n, est une fonction rationnelle de q^n, q désignant une constante dont le module est différent de l'unité; leurs limites s'expriment au moyen de la fonction Θ de Heine et de sa dérivée. Je montre, en outre (91), que ces mêmes transcendantes permettent de résoudre des problèmes intéressants de calcul fonctionnel.

Certains polynômes, ceux de Legendre par exemple, s'offrent comme

formant les coefficients du développement d'une fonction génératrice suivant les puissances d'une variable. J'ai étudié (68) les polynômes qui forment les coefficients de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ dans le développement de $f(h)e^{hx}$ suivant les puissances positives de h, $f(h)$ désignant une fonction quelconque de h développable en série entière. Ces polynômes partagent, avec la fonction x^n, cette propriété que la dérivée de l'un d'entre eux est égale au précédent multiplié par le degré n. Si la fonction $f(h)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les polynômes correspondants satisfont à des équations différentielles de même nature dont j'indique le mode de formation. Les développements en série procédant suivant ces polynômes ont été étudiés par Halphen ([1]), à la suite d'un développement particulier indiqué par M. Léauté ([2]).

J'ai encore étudié quelques autres polynômes : 1° les polynômes en a qui forment les coefficients des puissances de x dans le développement de $e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ en série entière (102); ces polynômes sont liés d'une façon intéressante à la somme des produits des n premiers entiers p à p; 2° certains polynômes (87) naissant de la série hypergéométrique du second ordre à une variable indépendante; 3° les polynômes de Bernoulli qui expriment, pour des valeurs entières de la variable, la somme des puissances semblables des n premiers entiers (88). Faisant, à ces polynômes, l'application d'une méthode donnée par M. Darboux ([3]), j'indique leurs expressions approchées quand leur degré est très grand; j'étudie ensuite (89) les développements en série procédant suivant ces polynômes, développements qui présentent des particularités curieuses; c'est ainsi que, pour $(y-x)^{-1}$, je forme un développement qui ne converge que pour des valeurs *entières* de x.

Je cite rapidement, pour terminer cette Notice déjà longue, un article sur les fractions continues périodiques (97) donnant l'expression générale de la réduite de rang n au moyen des racines de l'unité; puis une étude sur certaines équations différentielles linéaires contenant un paramètre variable (86) et analogues à des équations traitées par Liouville; enfin trois Notes de Géométrie : l'une (99) donnant tous les systèmes de deux familles

([1]) *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 781 et 823; *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. V, p. 462.

([2]) *Comptes rendus*, t. XC, p. 1404.

([3]) *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. IV, p. 5 et 377; 1877.

de courbes orthogonales uniquement composées de coniques; l'autre (101) démontrant cette propriété que les hélices sont les seules courbes gauches pour lesquelles une droite, invariablement liée au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale, puisse engendrer une surface développable; et la troisième (127) contenant l'étude de certaines courbes qui dépendent d'un paramètre et dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

SUPPLÉMENT.

FONCTIONS ELLIPTIQUES

(suite; voyez p. 36).

Théorie générale. — Abel et Jacobi ont représenté les fonctions elliptiques d'une variable x par le quotient de deux fonctions entières admettant chacune une des deux périodes et se reproduisant multipliées par une exponentielle linéaire en x quand on ajoute à la variable la deuxième période. En appliquant les principes de la théorie des fonctions posés par M. Weierstrass, on peut *a priori*, d'une manière fort simple, arriver à cette expression des fonctions elliptiques (104).

Soit $f(x)$ une fonction doublement périodique d'une variable se comportant, en tous les points à distance finie, comme une fraction rationnelle. Cette fonction peut, d'après les résultats trouvés par M. Weierstrass, se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ *n'ayant pas de zéros communs*. Cette forme n'est pas unique, car on peut évidemment multiplier le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière de x, $e^{g(x)}$. En disposant convenablement de cette fonction $g(x)$ et s'appuyant sur d'importants résultats dus à M. Guichard (*Annales de l'École Normale*, 1887), on arrive à mettre la fonction elliptique $f(x)$ sous la forme du quotient de deux autres fonctions entières $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, qui remplissent les conditions caractéristiques des fonctions d'Abel et Jacobi et qui peuvent, par suite, être exprimées à l'aide des fonctions Θ.

Cette méthode est importante en ce qu'elle s'étend (105) et (112) aux fonctions de deux variables à quatre paires de périodes.

Expression nouvelle des fonctions elliptiques. — D'après les théorèmes généraux de la théorie des fonctions, on reconnaît *a priori* l'existence d'une infinité de représentations analytiques d'une fonction *méromorphe dans tout le plan*, c'est-à-dire uniforme et n'ayant que des pôles à distance finie, ces représentations analytiques étant assujetties à donner la fonction pour toutes les valeurs de la variable. Si l'on se limite aux représentations qui donnent la fonction sous forme du quotient de deux séries convergentes pour toutes les valeurs de la variable, il existe encore une infinité de représentations différentes. Les plus simples sont : 1° celle qui donne la fonction sous forme du quotient de deux séries entières, par exemple celle qui donne les fonctions elliptiques sous forme du quotient de fonctions Θ; 2° celle qui donne la fonction sous forme d'une série unique mettant en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, série qui est définie par le théorème de M. Mittag-Leffler. Plus généralement, en admettant que la fonction ait pour zéros les points

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots$$

et pour pôles les points

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_\nu, \quad \ldots,$$

on pourra la regarder comme le quotient de deux fonctions méromorphes

$$\frac{P(z)}{Q(z)},$$

la fonction $P(z)$ ayant pour zéros une partie des points a_ν et pour pôles une partie des points b_ν; la fonction $Q(z)$ ayant pour zéros les autres points b_ν et pour pôles les autres points a_ν. Ces deux fonctions P et Q sont, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, représentées par des séries convergentes dans tout le plan. La seule difficulté qui se présentera et qui pourra être considérable sera de calculer les coefficients des séries et surtout ceux de la partie entière des développements. J'ai fait ce calcul pour les fonctions elliptiques (120) en prenant, pour $Q(z)$, une fonction entière ayant pour zéros les pôles de la fonction situés dans une moitié du plan et, pour $P(z)$, une fonction ayant pour pôles les pôles de la fonction situés dans l'autre moitié du plan. Ces recherches se rattachent à mes études (13) et (91) sur les fonctions que Heine a introduites comme une générali-

sation des fonctions eulériennes Γ, et à des résultats que M. Poincaré a indiqués dans ses Mémoires sur les invariants arithmétiques (*Comptes rendus*, 1879, et *Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Alger, 1881). Elles donnent les fonctions elliptiques sous une forme nouvelle mettant en évidence la double périodicité d'une manière différente de celle qui se présente dans les expressions connues. Voici comment : la fonction elliptique est le quotient de deux séries $P(z)$ et $Q(z)$, d'une forme simple, qui admettent séparément la période ω et se reproduisent divisées par $\left(q^2 e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - 1\right)$ quand on augmente z de la deuxième période ω'.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES.

Fonctions de deux variables à quatre paires de périodes sans singularités essentielles à distance finie. — Les fonctions doublement périodiques d'une variable qui se comportent, à distance finie, comme une fraction rationnelle, peuvent toutes, ainsi qu'il est bien connu, s'exprimer par des combinaisons rationnelles de fonctions Θ d'une variable. Après la découverte des fonctions Θ de plusieurs variables faite par Göpel et Rosenhain, on a dû se demander immédiatement si toute fonction de n variables avec $2n$ groupes de périodes, se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle, pourrait être exprimée à l'aide des fonctions Θ de n variables. Au premier abord il semble que non, car les périodes d'une fonction Θ de n variables ne peuvent pas être choisies arbitrairement : elles sont liées par $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Cependant, dans une conversation qu'il eut avec M. Hermite en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations doivent nécessairement exister entre les $2n$ groupes de périodes d'une fonction de n variables, tout au moins après une transformation d'un degré convenable effectuée sur ces périodes; mais il n'a donné aucune indication sur la méthode qui l'avait conduit à ce théorème d'une importance capitale. M. Weierstrass a, depuis, annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possède une démonstration de ce théorème; mais il n'a ni publié ni indiqué la méthode dont il fait usage. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1883, MM. Poincaré et Picard, s'appuyant sur ce théorème de M. Weierstrass, que $(n+1)$ *fonctions de n variables à 2n groupes de périodes sont liées par une relation algébrique*, ont donné une démonstration du théorème de Riemann fondée sur la considération d'intégrales de différentielles totales et sur la théorie des intégrales abéliennes.

En me bornant au cas le plus simple de deux variables indépendantes, je me suis proposé (105) et (112) de traiter directement la question. Par-

tant de l'expression d'une fonction de deux variables, sans singularités essentielles à distance finie, sous forme du quotient de deux fonctions entières, telle qu'elle résulte d'un théorème de M. Poincaré [1], je montre que, si cette fonction admet quatre paires de périodes, on peut toujours les amener à vérifier la relation de Riemann et exprimer la fonction par le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables. Je n'ai donc pas à m'appuyer sur l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables à quatre paires de périodes; la méthode suivie permet, au contraire, de démontrer l'existence de cette relation : cette méthode est l'extension naturelle de celle que j'ai suivie antérieurement pour les fontions elliptiques (104).

Je commence par démontrer le théorème préliminaire suivant :

Étant données deux fonctions entières $\mathrm{H}(x, y)$ *et* $\mathrm{K}(x, y)$ *de deux variables indépendantes vérifiant l'identité*

$$\mathrm{H}(x, y+1) - \mathrm{H}(x, y) = \mathrm{K}(x+1, y) - \mathrm{K}(x, y),$$

il existe une troisième fonction entière $\mathrm{G}(x, y)$ *vérifiant les deux équations*

$$\mathrm{G}(x+1, y) - \mathrm{G}(x, y) = \mathrm{H}(x, y),$$
$$\mathrm{G}(x, y+1) - \mathrm{G}(x, y) = \mathrm{K}(x, y).$$

Pour cela, je modifie la méthode que M. Guichard a donnée (*Annales de l'École Normale*, novembre 1887), pour démontrer un théorème analogue relativement aux fonctions d'une variable. Je forme, à l'aide d'une intégrale définie affectée de coupures des fonctions entières $\psi_n(z)$ vérifiant les identités

$$\psi_n(z+1) - \psi_n(z) = z^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et se comportant, quand n est très grand, de telle façon que, si

$$\mathrm{H}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

est une série convergente quel que soit z, il en soit de même de

$$\mathrm{G}(z) = a_0 \psi_0(z) + a_1 \psi_1(z) + a_2 \psi_2(z) + \ldots + a_n \psi_n(z) + \ldots;$$

(1) *Acta mathematica*, t. II.

cette dernière série définira alors une fonction entière $G(z)$ vérifiant la relation $G(z+1)-G(z)=H(z)$. Il est évident que les fonctions $\psi_n(z)$ ne diffèrent des polynômes de Bernoulli $\varphi_n(z)$ que par une fonction entière admettant la période 1 : c'est ce que je vérifie en me servant des expressions des polynômes de Bernoulli par des intégrales définies données par M. Hermite, et en montrant que $\psi_n - \varphi_n$ est un polynôme en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$. La fonction $\psi_n(z)$ une fois formée, la démonstration du théorème préliminaire est des plus faciles.

Voici maintenant comment se trouve résolue la question principale.

D'après un théorème de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. II), une fonction analytique uniforme $f(x, y)$ de deux variables x et y, se comportant comme une fraction rationnelle en tous les points à distance finie, peut s'écrire sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ étant *entières* et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction $f(x, y)$ est indéterminée. Ce mode de représentation n'est pas unique ; on en obtient évidemment une infinité d'autres possédant les mêmes propriétés, en multipliant le numérateur et le dénominateur de $f(x, y)$ par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière, $e^{g(x,y)}$. Si l'on suppose que la fonction $f(x, y)$ admette quatre groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (α, β), (α', β'), on arrive, en déterminant convenablement $g(x, y)$, à mettre la fonction $f(x, y)$ sous la forme du quotient de deux nouvelles fonctions entières $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ vérifiant les relations

$$\frac{\Phi(x+2\pi i, y)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+2\pi i, y)}{\Psi(x, y)} = 1,$$

$$\frac{\Phi(x, y+2\pi i)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x, y+2\pi i)}{\Psi(x, y)} = e^{nx},$$

$$\frac{\Phi(x+\alpha, y+\beta)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha, y+\beta)}{\Psi(x, y)} = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2i\pi}y+c},$$

$$\frac{\Phi(x+\alpha', y+\beta')}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha', y+\beta')}{\Psi(x, y)} = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2i\pi}y+c'},$$

où a, b, a', b', n désignent des entiers non nuls tous en même temps, les

périodes étant liées par l'équation

$$a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2\mathrm{N}i\pi.$$

Faisant alors un changement linéaire de variables, qui substitue aux variables x et y d'autres variables X et Y, on amène les fonctions Φ et Ψ à vérifier des relations de la forme

$$\frac{\Phi(\mathrm{X}+2\pi i, \mathrm{Y})}{\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = \frac{\Psi(\mathrm{X}+2\pi i, \mathrm{Y})}{\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = 1,$$

$$\frac{\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}+2\pi i)}{\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = \frac{\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}+2\pi i)}{\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = 1,$$

$$\frac{\Phi(\mathrm{X}+\mathrm{A}, \mathrm{Y}+\mathrm{B})}{\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = \frac{\Psi(\mathrm{X}+\mathrm{A}, \mathrm{Y}+\mathrm{B})}{\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = e^{\mathrm{MX}+\mathrm{C}},$$

$$\frac{\Phi(\mathrm{X}+\mathrm{A}', \mathrm{Y}+\mathrm{B}')}{\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = \frac{\Psi(\mathrm{X}+\mathrm{A}', \mathrm{Y}+\mathrm{B}')}{\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})} = e^{\mathrm{MY}+\mathrm{C}'},$$

et la relation précédente entre les périodes donne

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}'.$$

On retrouve donc les équations caractéristiques des fonctions Θ, fournissant immédiatement ces fonctions par la méthode des coefficients indéterminés, et l'on arrive à ce théorème que la fonction $f(x, y)$ est le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables.

Ce théorème fondamental étant démontré, il devient facile d'établir l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables, sans singularités essentielles, admettant quatre paires de périodes. Je n'insiste pas sur cette démonstration.

Fonctions de deux variables à deux paires de périodes sans singularités essentielles à distance finie. — Une fonction d'une variable à une période ω, sans points essentiels à distance finie, peut toujours être mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières, sans zéros communs, admettant séparément la période ω et pouvant, par suite, s'exprimer par la formule de Fourier. Il est naturel de se demander si une proposition analogue s'applique aux fonctions de deux variables. Tout d'abord, une fonction $f(x, y)$

de deux variables admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être mise sous la forme (107) et (112).

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination de $f(x, y)$ et vérifiant les deux relations

$$\varphi(x + 2\pi i, y) = \varphi(x, y), \qquad \varphi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y),$$
$$\psi(x + 2\pi i, y) = \psi(x, y), \qquad \psi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\psi(x, y),$$

où n désigne un entier.

Si cet entier n est nul, les fonctions entières φ et ψ, admettant séparément la période $2\pi i$ par rapport à x et y, sont données par la formule de Fourier. Si n est différent de zéro, il est aisé d'obtenir l'expression générale des fonctions φ et ψ. Mais il est plus simple de remarquer que l'on peut, avec des fonctions θ d'une variable, former une fonction entière $\theta_n(x, y)$ vérifiant les deux relations

$$\theta_n(x + 2\pi i, y) = \theta_n(x, y), \qquad \theta_n(x, y + 2\pi i) = e^{-nx}\theta_n(x, y),$$

de telle façon que, si l'on pose

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\,\theta_n(x, y), \qquad \Psi(x, y) = \psi(x, y)\,\theta_n(x, y),$$

les fonctions Φ et Ψ sont des fonctions entières admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$. On pourra donc mettre la fonction $f(x, y)$ sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)},$$

Φ et Ψ étant des fonctions entières admettant séparément les deux paires de périodes et développables, par conséquent, par la série de Fourier. On arrive ainsi à une expression analogue à celle des fonctions d'une variable avec une période, avec cette différence que l'expression ci-dessus n'est pas irréductible, puisque le numérateur et le dénominateur sont divisibles par une même série entière $\theta_n(x, y)$ s'annulant à distance finie.

Fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce avec des singularités essentielles. — En suivant la classification employée par M. Hermite pour les fonctions doublement périodiques d'une variable, j'appelle *fonction quadruplement périodique de troisième espèce* une fonction uniforme de deux variables x et y qui se reproduit, multipliée par une exponentielle linéaire en x et y, quand on augmente les variables de chacune des quatre paires de périodes. Je suppose essentiellement que l'on ne puisse pas, en multipliant cette fonction par une exponentielle de la forme

$$e^{Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey},$$

la ramener à être quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire à se reproduire multipliée par l'unité ou par une constante quelconque, quand on ajoute aux variables chacune des quatre paires de périodes.

On sait, d'après un théorème énoncé par Riemann et démontré par M. Weierstrass, par MM. Picard et Poincaré et par moi-même (112), qu'une fonction quadruplement périodique de deux variables de première espèce qui n'a pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être ramenée à avoir pour paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

vérifiant la relation

$$\beta = \alpha'.$$

Si la fonction admet des singularités essentielles, les paires de périodes (α, β) et (α', β') sont entièrement arbitraires. M. Picard a donné des exemples de fonctions de ce genre [1]. Il en est de même pour les fonctions quadruplement périodiques de deuxième espèce, comme je l'ai montré par des exemples (53). A cet égard, il y a, entre les fonctions quadruplement périodiques de deux variables de première et de deuxième espèce d'une part, et de troisième espèce d'autre part, cette différence remarquable que, *même si une fonction de troisième espèce admet des singularités essentielles, on peut toujours ramener ses périodes à être*

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta')$$

---

[1] *Comptes rendus*, 1er semestre 1889; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII, p. 131; 1889.

avec la relation de Riemann,

$$\beta = \alpha'.$$

Je démontre ce théorème (114) et je donne quelques exemples généraux de fonctions ou expressions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce, en suivant une méthode analogue à celle qui sert à former l'élément simple dans la théorie des fonctions doublement périodiques de troisième espèce (71), ou en imitant ce que fait Halphen dans son *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 468.

Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières. — M. Fuchs a obtenu, par l'inversion des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, des fonctions de deux variables indépendantes x et y qui ne changent pas de valeur quand on remplace x et y par $ax + by + c$ et $a'x + b'y + c'$, a, b, c, a', b', c' désignant des constantes déterminées. Je forme directement, à l'aide de séries ou de produits infinis, des fonctions de cette nature n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie.

J'indique d'abord (125) un exemple élémentaire, en composant avec des fonctions θ une fonction $\varphi(x, y)$ qui vérifie les relations

$$\varphi(x + 2\pi i, y) = \varphi(x, y + 2\pi i) = \varphi(x + 2a, y + x) = \varphi(x, y)$$

et qui admet, par suite, un groupe de substitutions linéaires entières. J'indique ensuite des produits infinis vérifiant les mêmes relations. Je m'occupe enfin (117) de fonctions de trois variables formées avec la fonction suivante, analogue à la fonction Θ,

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4 + 4xn^3 + 6yn^2 + 4zn}.$$

Si l'on considère les expressions

$$F(x, y, z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=k} \frac{\varphi(x, y, z + \gamma_\nu)}{\varphi(x, y, z + \gamma'_\nu)},$$

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} \frac{A_\nu \, d \log \varphi(x, y, z + \gamma_\nu)}{dz},$$

où les constantes A_ν ont une somme *nulle*, ainsi que les constantes $\gamma_\nu - \gamma'_\nu$,

ces expressions, analogues à celles des fonctions elliptiques, vérifient les relations

$$F\left(x+\frac{\pi i}{2}, y, z\right)=F\left(x, y+\frac{\pi i}{3}, z\right)=F\left(x, y, z+\frac{\pi i}{2}\right)$$
$$=F(x+a, y+2x+a, z+3x+3y+a)=F(x, y, z).$$

Elles admettent donc un groupe de substitutions linéaires entières. M. Rivereau a déterminé les zéros de la fonction $\varphi(x, y, z.)$ (*Annales de la Faculté de Marseille;* 1892.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(suite; voyez p. 12).

Équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes. — Les fonctions périodiques d'une variable z sont des fonctions qui ne changent pas quand on y remplace z par $z+\omega$, ω étant une certaine constante. On peut, plus généralement, imaginer des fonctions de z qui ne changent pas de valeur quand on fait sur z une opération déterminée $\varphi(z)$, ou même plusieurs opérations déterminées $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ...; on aura alors

$$f[\varphi(z)]=f(z), \quad f[\psi(z)]=f(z), \quad \ldots.$$

Telles sont les fonctions doublement périodiques pour lesquelles

$$\varphi(z)=z+\omega, \quad \psi(z)=z+\omega',$$

les fonctions modulaires de M. Hermite et les fonctions fuchsiennes et kleinéennes de M. Poincaré pour lesquelles $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... sont certaines fonctions de la forme $\frac{az+b}{cz+d}\cdots$ J'ai donné (10 et 11) des exemples de fonctions $f(z)$ vérifiant une relation de la forme

$$f[\varphi(z)]=f(z),$$

$\varphi(z)$ désignant une fonction algébrique ou transcendante. M. Rausenberger a publié une suite de Mémoires intéressants sur les fonctions $f(z)$ vérifiant une ou plusieurs relations de la forme ci-dessus, en supposant que les opérations désignées par $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... soient *algébriques;* il a considéré des fonctions plus générales $f(z)$ vérifiant des relations de la forme

$$f[\varphi(z)]=\psi[f(z)],$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant des fonctions algébriques données. A un autre point de vue, des équations fonctionnelles de formes analogues dont les principales sont

$$f[\varphi(z)]=\psi(z)f(z), \quad f[\varphi(z)]=f(z)+\psi(z),$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant des fonctions données, algébriques ou transcendantes, ont été étudiées par Abel, par M. Schrœder, M. Korkine et enfin par M. Kœnigs [1] à qui l'on doit d'importants théorèmes sur l'existence et l'expression générale des solutions holomorphes de certaines équations fonctionnelles. Ces théorèmes permettent d'étudier et d'intégrer des équations linéaires rentrant dans un type général que j'ai traité antérieurement (27).

Je considère des équations différentielles linéaires et homogènes définissant u en fonction de z et possédant la propriété suivante. Il existe deux fonctions φ et ψ telles qu'en faisant le changement de fonction et de variable

$$z' = \varphi(z), \qquad u' = u\,\psi(z),$$

on ramène l'équation à la forme primitive où z serait remplacé par z' et u par u'. En d'autres termes, il existe un changement de fonction et de variable qui transforme l'équation *en elle-même*. J'admets de plus, avec M. Kœnigs, que la fonction $\varphi(z)$ est uniforme dans l'intérieur d'une région R du plan et jouit de la propriété que, si z est intérieur à cette région, il en est de même du point $z_1 = \varphi(z)$; alors, si l'on pose généralement $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, les points de la suite $z, z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont tous à l'intérieur de la région R : ils doivent converger régulièrement vers une limite x qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point singulier essentiel, et qui est un zéro de la fonction $z - \varphi(z)$. Ces conditions étant remplies, je suppose que les coefficients de l'équation différentielle sont *holomorphes ou méromorphes au point limite* x, hypothèse qui écarte les équations dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions fuchsiennes. Je montre (108 et 111) que toutes ces équations sont intégrables à l'aide de la fonction $B(z)$ introduite par M. Kœnigs, et même qu'elles peuvent, par une substitution que j'indique, être ramenées à avoir leurs coefficients constants. Cette substitution est celle qu'Halphen a employée (Mémoire couronné, *Savants étrangers*, t. XXVIII) pour ramener l'équation à la forme qu'il nomme *canonique :* l'application des théorèmes de M. Kœnigs montre que cette forme canonique est à *coefficients constants*.

---

(1) *Recherches sur les substitutions uniformes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883); *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, année 1884, supplément); *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* (*ibid.*, novembre 1885).

Lorsqu'on prend le cas particulier où

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

les équations que l'on obtient sont celles qui ont été intégrées par Halphen (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 779).

On peut étendre une partie des résultats précédents à des équations non linéaires ; par exemple, aux équations considérées par Abel [1], par M. R. Liouville [2], par M. Elliot [3], par M. Rivereau [4] et par nous-même (66).

Ainsi, les équations homogènes mais non linéaires par rapport à la fonction inconnue u et à ses dérivées $\frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \cdots$ conservent la même forme quand on fait le changement de fonction et de variable

$$u' = u\,\psi(z), \qquad z' = \varphi(z).$$

Il pourra arriver qu'un choix convenable des fonctions $\psi(z)$ et $\varphi(z)$ les transforme en elles-mêmes. Si la fonction $\varphi(z)$ remplit les conditions supposées par M. Kœnigs et si les coefficients de l'équation sont holomorphes ou méromorphes au point limite x, la considération des invariants permet d'étendre à ces équations une notable partie des résultats précédents.

Équations aux dérivées partielles. Potentiel. — Soit $u + iv$ une fonction d'une variable imaginaire $x + yi$; la partie réelle u et le coefficient v de i vérifient les deux équations fondamentales

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ces deux fonctions u et v vérifient donc l'équation du potentiel loga-

(1) *Œuvres*, t. II, p. 19 et 26.

(2) *Comptes rendus*, 1886 et 1887.

(3) *Ibid.*, 1890, premier semestre.

(4) *Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées*, Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 1890. Gauthier-Villars.

rithmique et sont associées ou conjuguées par les relations (1). M. Picard, dans une Note récente (*Comptes rendus*, 5 avril 1891), a généralisé ce point de vue en considérant des systèmes de deux fonctions associées vérifiant des relations analogues à (1), avec des coefficients fonctions de x.

Je me suis proposé d'étudier un système analogue à (1), pour le potentiel à trois variables (124). Considérons quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles x, y, z, vérifiant les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} + \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} - \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

qui présentent une certaine symétrie, en ce sens que la fonction Z, par exemple, est liée à X, $-$Y, $-$T comme T à Y, X, Z, etc. Si des trois relations (3) on tire $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$, qu'on calcule ensuite $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ et qu'on forme la somme de ces expressions, on trouve *identiquement zéro*. On a un résultat analogue pour X, Y, Z. De sorte que, en posant

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

les équations (3) entraînent les quatre relations

$$(4)\qquad \Delta X = 0, \quad \Delta Y = 0, \quad \Delta Z = 0, \quad \Delta T = 0,$$

de même que les équations (1) entraînent les relations (2). Je démontre (118) que, dans le système (3), on peut choisir arbitrairement les deux fonctions Z et T, pourvu qu'elles vérifient les deux conditions

$$\Delta Z = 0, \quad \Delta T = 0,$$

et obtenir ensuite les déterminations les plus générales des fonctions X et Y par des quadratures suivies de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial z}\right)_0 = 0,$$

définissant φ comme fonction de x et y, l'indice o signifiant que, dans le dernier terme, z est remplacé par une constante z_0.

Le système (3) est un cas particulier d'un système d'équations du même genre (124) où figurent quatre fonctions X, Y, Z, T de quatre variables x, y, z, t, qui vérifient chacune l'équation à quatre termes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. — L'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, qui se présente dans la théorie de la chaleur, a été l'objet d'un grand nombre de travaux. Intégrée par Fourier, Poisson, Ampère [1], elle a été étudiée en détail par Riemann dans son Ouvrage sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique [2], et par Schlaefli, dans un Mémoire inséré au Tome 72 du *Journal de Crelle*. M. Jordan l'a traitée comme exemple dans le Tome III de son *Cours d'Analyse* (p. 387). M. Boussinesq a résumé les méthodes générales d'intégration propres à cette équation et aux autres équations de la Physique mathématique dans le Tome II de son *Cours d'Analyse infinitésimale* (*Calcul intégral, compléments*). Citons encore Mme Kowalevski [3] qui a appliqué à cette équation spéciale les méthodes de Cauchy, en montrant qu'il n'existe pas toujours une intégrale z qui, pour $y = 0$, se réduise à une fonction donnée de x : par exemple, cette équation n'a pas d'intégrale qui se réduise à $\frac{1}{1-x}$ pour $y = 0$. M. Darboux [4] a rappelé cet exemple de Mme Kowalevski à propos d'une Note de M. Méray [5] sur un fait de même nature. L'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

constitue le type le plus important auquel on peut réduire les équations linéaires à coefficients constants

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0$$

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, t. X, p. 587.

(2) *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, p. 107, 122; 1869.

(3) *Journal de Crelle*, t. 80, p. 22.

(4) *Comptes rendus*, t. CVI, p. 651.

(5) *Ibid.*, p. 648.

dans le cas *parabolique* $B^2 - AC = 0$, comme on le verra dans un Mémoire de M. du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 104). Le cas elliptique $B^2 - AC < 0$ a été étudié par de nombreux auteurs, Lejeune-Dirichlet, Riemann, Schwarz, Weber ([1]). Plus récemment, M. Picard a consacré d'importants Mémoires à l'étude de ce cas, même dans l'hypothèse des coefficients variables ([2]); il a montré que, si $B^2 - AC > 0$, l'intégrale n'est pas nécessairement analytique. M. du Bois-Reymond s'est occupé, dans le Mémoire cité (*Crelle*, t. 104), du cas hyperbolique $B^2 - AC > 0$ en employant principalement la méthode de Riemann fondée sur la considération de l'équation adjointe.

J'ai étudié (113) cette équation au point de vue de la Physique mathématique, en supposant x, y, z réels et en m'inspirant des méthodes de Riemann. Je traite d'abord les questions suivantes :

1° *Chercher toutes les transformations de la forme*

$$z = \lambda(x, y) z', \qquad x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y),$$

qui ramènent l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

à la même forme

$$\delta z' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} - \frac{\partial z'}{\partial y'} = 0.$$

On trouve que la relation entre x, y et x', y' définit une transformation homographique du plan qui remplace ici l'inversion de Thomson pour le potentiel.

2° *Trouver tous les polynômes vérifiant l'équation.* — Ces polynômes s'expriment simplement à l'aide des polynômes à une variable que M. Hermite ([3]) a déduits de la différentiation de l'exponentielle e^{-z^2}.

Me servant ensuite d'une formule analogue à la formule de Green déduite de la notion d'équation adjointe due à Riemann, j'établis une importante formule qui me permet de démontrer le théorème suivant :

Une fonction uniforme $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z = 0$, exis-

---

([1]) *Mathematische Annalen*, t. I.

([2]) *Acta mathematica*, t. XII; *Journal de Mathématiques*, 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, 60e Cahier, 1890; *Comptes rendus*, 1891, 1er semestre.

([3]) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266.

tant dans toute la partie du plan située au-dessous *d'une certaine parallèle à l'axe* Ox, $y \leqq b$, *et restant* finie, *ainsi que sa dérivée par rapport à* x, *dans cette partie du plan, pour toutes les valeurs finies ou infinies de* x *et* y, *se réduit à* une constante.

On en conclut que l'équation $\delta z = 0$ ne peut pas admettre de solution uniforme dans tout le plan, n'ayant aucun point singulier à l'infini, et ayant un seul point singulier $x = a$, $y = b$ à distance finie; car une telle fonction serait constante pour toutes les valeurs de y *inférieures* à b. Il y a donc là une différence remarquable avec les équations linéaires dans le cas elliptique qui admettent des intégrales avec un seul point singulier; par exemple,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

admet l'intégrale

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

qui a, comme seul point singulier, l'origine.

Enfin, je cherche à rendre compte de ce fait que la plupart des solutions simples de l'équation $\delta z = 0$ admettent des lignes de discontinuité parallèles à Ox.

Certains des théorèmes établis dans ce Mémoire s'interprètent d'une façon simple dans la théorie de la chaleur : je les reporte à la page 102, *Théorie de la chaleur*.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DOUBLES.

Les polynômes à deux variables analogues aux polynômes de Legendre et aux polynômes $\cos(n \operatorname{arc} \cos x)$ ont été découverts par M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 64, et *Comptes rendus*, t. LX), dont les indications ont conduit Didon à des résultats intéressants, d'une grande généralité, relatifs à des polynômes $U_{m,n}(x, y)$ de degrés $m + n$ tels que l'on ait

$$\int\int K(x, y)\, U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

tant que $(m - \mu)^2 + (n - \nu)^2$ n'est pas nul, $K(x, y)$ étant une fonction donnée et le champ d'intégration ayant une forme déterminée. Certains de ces polynômes peuvent être rattachés aux séries hypergéométriques de deux variables (16 et 103). Les polynômes de Legendre interviennent dans la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales définies simples et les polynômes plus généraux $P_n(x)$ caractérisés par les conditions

$$\int_a^b K(x)\, P_n(x)\, P_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (n \gtrless \nu)$$

dans le calcul approché des intégrales de la forme

$$\int_a^b K(x) f(x)\, dx,$$

où $K(x)$ est une fonction donnée, comme l'ont montré MM. Christoffel, Tchebicheff et Heine.

Il y a lieu de penser que les polynômes de M. Hermite et les polynômes de Didon interviendront de même dans le calcul approché des intégrales doubles de la forme

$$\int\int K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

K étant une fonction déterminée servant à la définition des polynômes et le champ d'intégration ayant une forme donnée.

Je me suis proposé (115) de mettre ce fait en évidence dans des cas simples pouvant servir de types à une théorie générale. J'ai tout d'abord indiqué quelques propriétés nouvelles des polynômes de M. Hermite généralisés par Didon, entre autres une liaison très simple entre une certaine forme quadratique et la notion de polynômes associés introduite par M. Hermite. Puis, arrivant à l'objet principal du Mémoire, je pose le problème comme il suit. Soient K une fonction de x et y gardant un signe constant dans le champ d'intégration et $f(x, y)$ une fonction développable, dans le champ d'intégration, en une série de puissances entières et positives de x et y; pour évaluer l'intégrale double

$$I = \int\int \mathrm{K} f(x, y)\, dx\, dy,$$

je prends un polynôme $\varphi(x, y)$ de degré p en x et y, contenant par conséquent un nombre

$$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

de coefficients, et je détermine ces coefficients par des équations linéaires en exprimant que le polynôme φ prend la même valeur que la fonction $f(x, y)$ en n points (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) situés dans le champ d'intégration et n'appartenant pas à une courbe d'ordre p : la valeur approchée de l'intégrale est alors

$$J = \int\int \mathrm{K}\,\varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Comme le fait Gauss dans sa méthode d'évaluation approchée des intégrales simples, il s'agit maintenant de déterminer les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), de manière à obtenir la plus grande approximation possible, au sens de Gauss. Je forme les équations qui déterminent ces points. Sans entrer dans des détails sur le cas général, je me borne ici à indiquer deux résultats particulièrement simples.

Tout d'abord, le cas le plus simple de tous est le cas de $p = 0$, $n = 1$. On substitue alors à la fonction $f(x, y)$ une constante $f(x_1, y_1)$ égale à la valeur que prend $f(x, y)$ en un point (x_1, y_1) pour le moment inconnu : il s'agit de déterminer ce point de telle façon que l'erreur commise soit la moindre possible. On trouve que le point (x_1, y_1) doit être choisi, au centre

de gravité du champ d'intégration, la densité en chaque point étant égale à $K(x, y)$. Si l'on forme le polynôme le plus général *du premier degré* P, s'annulant pour $x = x_1, y = y_1$, on démontre que ce polynôme possède la propriété exprimée par l'équation

$$\int\int \mathrm{KP}\, dx\, dy = 0;$$

c'est donc le polynôme le plus général du premier degré remplissant les conditions des polynômes de Didon; en l'égalant à zéro, on obtient une droite arbitraire passant par le point fixe cherché (x_1, y_1).

Voici ensuite un second exemple simple. Supposons que le champ d'intégration soit un cercle de centre O et de rayon 1 et que $\mathrm{K} = 1$. Prenons trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sur un cercle concentrique, et remplaçons la fonction $f(x, y)$ par un polynôme $\varphi(x, y)$ du premier degré devenant égal à $f(x, y)$ aux trois points. Pour que l'erreur commise soit la plus petite possible, il faut que les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) soient les sommets d'un triangle équilatéral quelconque inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

(suite; voyez p. 67).

Sur les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales. — Ces lois de forces ont été déterminées simultanément par Halphen et M. Darboux, à la suite d'une question posée par M. Bertrand. Je simplifie (119) notablement le calcul d'Halphen en employant la transformation homographique du mouvement d'un point (52 et 79); cette transformation permet de ramener le cas des forces centrales à celui des forces parallèles pour lequel la solution est beaucoup plus facile.

Sur des transformations de mouvements. — A la suite d'une remarque de M. Goursat, j'ai généralisé la théorie de l'homographie en Mécanique (79) de la façon suivante.

Soit un système matériel dont les liaisons sont indépendantes du temps et dont la position est définie par n paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si ce système est sollicité par des forces dépendant des positions et des vitesses des points d'application, les équations du mouvement sont, d'après Lagrange,

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p'_a}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_a} = P_a, \qquad p'_a = \frac{dp_a}{dt},$$

S désignant la demi-force vive du système, et

$$P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + \ldots + P_n\,\delta p_n,$$

la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées, pour un déplacement arbitraire compatible avec les liaisons. Les quantités P_a sont des fonctions de $p_1, p_2, \ldots, p_n, p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$; dans le cas particulier où les forces ne dépendent que de la position du système, les P_a ne contiennent pas $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$.

A côté de ce premier système qui se meut dans le temps t, considérons un deuxième système dont la configuration dépend de n paramètres q_1, q_2, ..., q_n et qui se meut dans le temps t_1, sous l'action de forces quelconques. Les équations du mouvement de ce système sont

$$(2)\qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_a}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_a} = \mathrm{Q}_a, \qquad q'_a = \frac{dq_a}{dt_1},$$

les quantités Q_a dépendant de q_1, q_2, ..., q_n et de leurs dérivées q'_a. On devra considérer les deux problèmes de Mécanique comme *équivalents*, s'il existe une transformation de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} q_a = \varphi_a(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ dt = \lambda(p_1, p_2, \ldots, p_n)\, dt_1, \end{cases}$$

transformant le système des équations (2) dans le système (1).

Je démontre (121) que, si l'on n'impose aucune condition aux forces, on peut, d'une infinité de manières, faire correspondre à tout mouvement de l'un des systèmes, sous l'action de forces dépendant des positions et des vitesses, un mouvement analogue de l'autre.

Je particularise ensuite le problème en cherchant si, à tout mouvement du premier système, sous l'action de forces *ne dépendant que de la position* du système, on peut faire correspondre un mouvement analogue du second. J'établis que la transformation n'est possible que si certaines relations de condition ont lieu entre les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ des deux formes S et T. De plus, *si la transformation existe, elle doit faire correspondre à un mouvement du premier système, quand aucune force n'agit sur lui, un mouvement analogue du deuxième*. En un mot, la transformation doit conserver les mouvements *géodésiques* (126). On se trouve ainsi amené à une question qui a été étudiée par MM. Beltrami, Lipschitz, Dini, dans leurs travaux sur les formes quadratiques de différentielles, et par M. S. Lie.

Dans des Notes récentes, M. Painlevé (*Comptes rendus*, 1892) a démontré ce même théorème à côté d'autres propositions qu'il faut rapprocher de plusieurs Notes de M. R. Liouville (*Comptes rendus*, 1892).

Il est évident que l'on peut toujours, pour un système quelconque, employer la transformation $dt = \mathrm{C}\, dt_1$, C étant une constante réelle ou purement imaginaire (*voyez* Stäckel, *Crelle*, t. 107); mais, pour des systèmes spéciaux, il en existe d'autres. Par exemple, pour des points matériels libres, on peut employer une transformation homographique (52); pour un point mobile sur une sphère, on peut employer une transformation par pro-

jection centrale sur un plan (119). Enfin, comme l'a montré M. Dautheville (*Comptes rendus* et *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VII, 1890) on peut transformer le mouvement d'un point sur une surface à courbure totale constante en un mouvement plan (ce qui correspond à un théorème de M. Beltrami), et, plus généralement, on peut transformer le mouvement d'un point sur une surface en un mouvement d'un point sur une autre surface (non applicable), si la première surface satisfait aux conditions trouvées par M. Dini, pour que les lignes géodésiques se correspondent.

Extension des équations de Lagrange au cas du frottement. — En combinant le principe des vitesses virtuelles et le principe de d'Alembert, Lagrange a réduit à un procédé uniforme la mise en équations de tous les problèmes de Mécanique. Lorsque certains points du système glissent *avec frottement* sur des surfaces, on peut évidemment employer encore la méthode de Lagrange, mais à condition d'ajouter aux forces directement appliquées les forces de frottement dont les grandeurs sont inconnues, puisqu'elles sont proportionnelles aux réactions normales des surfaces; il faut ensuite éliminer ces grandeurs inconnues. J'ai modifié (109) la méthode de Lagrange de manière à obtenir des équations du mouvement ne contenant ni les forces de liaison, ni les forces de frottement. La méthode que j'emploie consiste à appliquer le principe de d'Alembert, en imprimant au système un déplacement virtuel qui est compatible avec les liaisons sans frottement et dans lequel chaque point frottant se déplace normalement à la réaction totale de la surface sur laquelle il glisse. Cette méthode permet d'appliquer au cas du frottement les équations de Lagrange.

Du tautochronisme dans un système matériel. — Le tautochronisme dans le mouvement d'un point a été l'objet de nombreuses recherches; il ne semble pas que l'on se soit occupé du tautochronisme des systèmes. J'ai traité cette question (110) en posant le problème comme il suit : *Imaginons un système à liaisons indépendantes du temps, possédant k degrés de liberté, sollicité par des forces connues ne dépendant que de la configuration du système; quelles nouvelles liaisons, au nombre de $k-1$, faut-il imposer au système pour que le système à liaisons complètes ainsi obtenu soit tautochrone, c'est-à-dire mette le même temps à revenir à une position déterminée, quelle que soit la position initiale dans laquelle on l'abandonne à lui-même sans vitesse?*

Je montre que la résolution du problème dépend de l'intégration de deux

équations simultanées; si donc k est supérieur à 2, il y a indétermination : la question comporte une infinité de solutions. Pour déterminer le problème, on peut s'imposer $(k-2)$ conditions nouvelles, par exemple, assujettir le système final à liaisons complètes, à posséder la propriété du tautochronisme, non seulement à l'égard des forces données, mais encore à l'égard de $(k-2)$ autres systèmes de forces. Ainsi, pour un point matériel libre, on obtient un problème déterminé en cherchant sur quelle courbe il faut le faire glisser, pour qu'il y ait tautochronisme à la fois pour la pesanteur et pour une attraction issue d'un point fixe et fonction de la distance.

Propriétés d'une position d'équilibre d'un système. — Lorsqu'un système dont les liaisons sont indépendantes du temps est sollicité par des forces dérivant d'une fonction de forces U, la recherche des positions d'équilibre du système se trouve ramenée à la recherche des maxima et minima de cette fonction U regardée comme fonction des paramètres indépendants qui servent à définir la configuration géométrique du système.

En partant de cette propriété bien connue qui est une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles, on peut, même pour un système sollicité par des forces ne dérivant pas d'une fonction de forces, assigner une infinité de fonctions devenant maxima ou minima *dans une position d'équilibre donnée du système*. On obtient ainsi (116) des théorèmes donnant des propriétés de la position d'équilibre considérée mais ne permettant pas, en général, de trouver cette position, car l'énoncé de ces propriétés suppose connue la position d'équilibre. Je rattache à ce point de vue des théorèmes de Lagrange (principe de Torricelli) et de Möbius (principe du minimum de la somme des carrés des distances).

Questions diverses. — Je cite sommairement deux articles de Mécanique, l'un (122) donnant une forme générale de la fonction des forces pour laquelle on peut intégrer les équations du mouvement d'un point dans l'espace en coordonnées elliptiques; l'autre (123) montrant que, grâce à une proposition de MM. Tait et Thomson, on peut étendre aux courbes brachistochrones la théorie des *développées*, des *lignes de courbure*, etc., en remplaçant partout les arcs de courbes par le temps que met le mobile à les parcourir sans frottement, la constante des forces vives étant nulle.

Je termine cette analyse des Mémoires de Mécanique en restituant à Clebsch un théorème sur l'équilibre des fils (76), que je croyais avoir découvert et qui se trouve inséré au tome 57 du *Journal de Crelle*, p. 94.

Théorie de la chaleur. — Mon étude sur l'équation différentielle $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (113) a été entreprise principalement pour répondre à la question suivante, qui m'a été posée par M. Boussinesq, sur la théorie de la chaleur. On considère un conducteur indéfini dans lequel la température u est supposée dépendre uniquement de l'abscisse x. Cette température u étant donnée arbitrairement en fonction de x, $u = f(x)$, à l'instant initial $t = 0$, les formules de Fourier déterminent la température à un instant *postérieur* quelconque ($t > 0$). Mais on demande : 1° *si l'état initial donné pour* u, $u = f(x)$, *provient lui-même d'un état antérieur* ($t < 0$); 2° *lorsque cet état antérieur existe, s'il est unique et comment on peut le trouver*. Voici la réponse à ces deux questions : l'état antérieur n'existe pas toujours; quand il existe, il est unique et peut être déterminé dans des cas très généraux. On reconnaît que l'état antérieur existe en s'assurant de la convergence de certaines séries. On peut indiquer, à ce sujet, une condition analytique curieuse : pour que l'état antérieur existe, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction donnée $f(x)$ soit une fonction transcendante entière de x, c'est-à-dire une fonction développable en série procédant suivant les puissances entières positives de x, convergente, quel que soit x. Le fait que cette condition n'est pas suffisante résulte d'un exemple que j'indique pour le cas de l'armille, d'après Fourier.

BIBLIOGRAPHIE.

PREMIÈRE PARTIE.

(1889).

Recueil des Savants étrangers.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.

Acta mathematica.

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

American Journal of Mathematics.

Bulletin de la Société mathématique de France.

Bulletin des Sciences mathématiques.

Association française pour l'avancement des Sciences (Congrès de Montpellier, 1879).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

Mathematische Annalen.

Archiv der Mathematik und Physik de Grünert.

SUPPLÉMENT.

(1892).

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences.

Acta mathematica.

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.

American Journal of Mathematics.

Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Bulletin de la Société mathématique de France.

Nouvelles annales de Mathématiques.

OUVRAGES D'ENSEIGNEMENT.

Cours de Mécanique rationnelle, professé à la Faculté des Sciences de Paris, feuilles lithographiées, rédigées par MM. Abraham et Delassus, élèves à l'École Normale supérieure.

Notes de Géométrie analytique ajoutées à la Géométrie analytique de Briot et Bouquet (Sur les invariants simultanés de deux coniques, la théorie des formes quadratiques, les courbes unicursales, etc.).

TITRES DIVERS.

Lauréat de l'Institut : Prix Bordin 1885.
Prix Poncelet 1887.
Prix Petit d'Ormoy 1889.

Médaille d'or dans le concours international institué par S. M. Oscar II, roi de Suède et de Norvège, à l'occasion du 60e anniversaire de sa naissance (21 janvier 1889).

Présenté par la Section de Géométrie :

En cinquième ligne, en 1881.
En quatrième ligne, en 1884.
En troisième ligne, en 1885.
En deuxième ligne, en 1886.
En deuxième ligne, en 1887.
En deuxième ligne, en 1889.

TABLE DES MATIÈRES.

18895 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.